

Nicht-Euklidische Geometrie, II.

Vorlesung,

gehalten während des Sommersemesters 1890

von

F. Klein.

Ausgearbeitet von Fr. Schilling.

— Zweiter Abdruck. —

GÖTTINGEN 1893.



Nicht-Euklidische Geometrie II

Vorlesung

gehalten von Dr. phil. habil. Hermann Schubert

in Leipzig

Verlag von C. F. Schöningh

Leipzig 1891

Druck von C. F. Schöningh

Preis 1 Mark

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Nicht-Euklidische Geometrie. II.	
Vorbemerkungen	1
I. Einleitung in die projective Raumgeometrie.	
Punkt- und Ebenen-Coördinaten	2
Liniencoordinaten	9
Complexe, Congruenzen etc.	23
Congruenzen mit imaginären Leitlinien	33
II. Imaginäre Raumelemente.	
Imaginäre Punkte und Ebenen	38
Imaginäre Gerade insbesondere	40
III. Allgemeines über Flächen zweiten Grades.	
Algebraische Eigenschaften, Eintheilung der F_2	47
Realitätsunterschiede der ovalen, ringförmigen, nulltheiligen F_2	55
IV. Gerade Linien auf den F_2.	
Ringförmige Flächen	66
Nulltheilige F_2 ; die ausgezeichneten Congruenzen	75
Ovale F_2 ; Beziehungen zur Functionentheorie	82
V. Collineationen des Raumes.	
Ueberhaupt	91
einer F_2 in sich	97
VI. Speciell bei der nulltheiligen F_2.	
Cayley's allgemeine Formel für orthogonale Substitutionen	108
Specielle Formeln für $n = 4$	113
Beziehungen zur Quaternionentheorie	120
VII. Bei der ringförmigen F_2.	
Projective Geometrie auf der F_2	125
Maassgeometrie ebendasselbst	133

VIII. Ovale Flächen.

Parametervertheilung über die Fläche hin	142
Verschiedene Arten zugehöriger Maassgeometrie, Doppelverhältniss von 4 Punkten der Fläche	151
Ueberhaupt viererlei Geometrie auf der Fläche; zugehörige Gruppe und Invarianten- theorie	160
Bedeutung dieser Geometrien für Functionentheorie	170
Kinematisches zur einzelnen linearen Substitution	177

IX. Einordnung der Metrik in das projective System.

Kugelkreis	191
Grundsätze der Kinematik	199
Mechanik freier Systeme, Potential.	203
Mechanik starrer Körper schlechtweg (Schraubentheorie)	211
Massengeometrie	217

X. Specielle Bemerkungen zur Nicht-Euklidischen Geometrie.

Allgemeine Distanzformeln	224
Die Schiebungen der elliptischen Geometrie	231
Clifford's Parallelen	234-238



Die Aufgabe dieser Vorlesung läßt sich leicht bezeichnen, insofern es sich um eine Fortsetzung der Vorlesung des letzten Semesters handelt. Wir hatten uns dort die Beschränkung auferlegt, uns nur in zwei Dimensionen in der Ebene zu bewegen. Wir werden daher jetzt drei Dimensionen betrachten und in ihnen analogen Untersuchungen uns widmen. Diese Erweiterung wird wenig principielle Schwierigkeiten, dafür aber besonderes Interesse bieten. Beispielsweise werden wir, wenn wir die Cayley'sche Maassbestimmung für den Raum haben, die hierauf sich stützende Kinematik betrachten und dadurch der Mechanik der gewöhnlichen Geometrie die Mechanik der Nicht-Euklidischen Geometrie gegenüberstellen. Ferner werden wir für die Funktionentheorie neue Hilfsmittel gewinnen, entsprechend dem in vorigen Semester bereits für die Ebene ausgesprochenen Gedanken, daß die Nicht-Euklidische Geometrie für die moderne Funktionentheorie besonders wichtig ist. Im übrigen wollen wir gleich ähnlich einteilen, wie im vorigen Semester; wir werden wieder zwei Haupttheile zu unterscheiden haben. Im ersten Theil müssen wir uns mit der projektiven Geometrie des Raumes vertraut machen. Dieser Abschnitt wird daher den Charakter einer Einleitung haben. Der zweite Theil wird sich mit der Einordnung der metrischen Beziehungen in die projek.

tive Geometrie beschäftigen; wir sagen allgemein mit der Einordnung der metrischen Beziehungen, "weil wir nicht nur die Verhältnisse der Cayley'schen Maassbestimmung, sondern auch die gewöhnliche Euklidische vom projektiven Standpunkte aus betrachten wollen.

Erster Theil: Einleitung:

Projektive Geometrie des Raumes.

Es ist wohl billig, zunächst von den Grundgebilden und ihren Coordinaten zu reden. Das erste Grundgebilde ist der Punkt, demselben steht dualistisch als zweites Grundgebilde die Ebene gegenüber.

Sprechen wir zuerst vom Punkte. Statt der gewöhnlichen rechtwinkligen Coordinaten x, y, z werden wir in unserer Vorlesung durchaus Tetraedercoordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 gebrauchen, deren Verhältniss $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ allein in Betracht kommt. Wir definieren dieselben zunächst am kürzesten, indem wir von den x, y, z ausgehen. Wir setzen:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{13}z + \alpha_{14} \end{cases},$$

$$\begin{cases} x_2 = \alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \alpha_{23}z + \alpha_{24} \end{cases},$$

$$\begin{cases} x_3 = \alpha_{31}x + \alpha_{32}y + \alpha_{33}z + \alpha_{34} \end{cases},$$

$$\begin{cases} x_4 = \alpha_{41}x + \alpha_{42}y + \alpha_{43}z + \alpha_{44} \end{cases}.$$

In Worten: Die Tetraedercoordinaten verhalten sich

wie ganze lineare Funktionen der gewöhnlichen Coordinaten x, y, z , wobei jedoch die Bedingung zu erfüllen ist, daß die Determinante der Coefficienten $|a_{ik}| \neq 0$ sein soll. Andernfalls wären die x_1, x_2, x_3, x_4 nicht als Coordinaten zu benutzen, da wir nicht, umgekehrt die x, y, z durch dieselben ausdrücken könnten.

Hieran knüpfen sich nun gleich einige Bemerkungen. Setzen wir die rechten Seiten der obigen Beziehungen gleich 0 z. B. $a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} = 0$, so sind hierdurch 4 Ebenen dargestellt, wir nennen sie die 4 Ebenen des Coordinatentetraeders. Setzen wir ferner die 4 Ausdrücke gleichzeitig gleich 1, so finden wir durch Auflösung der Gleichungen die gewöhnlichen Coordinaten des sogenannten Einheitspunktes unseres Tetraedercoordinatensystems, d. h. desjenigen Punktes, dessen 4 Coordinaten in diesem System einander gleich sind. Wir fügen sogleich die Bemerkung hieran, daß wir das Verhältnis je zweier der homogenen Coordinaten $\frac{x_\alpha}{x_\beta}$ immer durch ein Doppelverhältnis deuten können, welches sich auf die aus dem Coordinatentetraeder, dem Einheitspunkt und dem Punkte x bestehende Figur bezieht. Dieses Doppelverhältnis können wir dann andererseits als Definition von $\frac{x_\alpha}{x_\beta}$ gelten lassen, insofern es uns darauf ankommt, alles auf Doppelverhältnisse hinauszuspielen. Wenn wir nun ein zweites Tetraedercoordinatensystem

y_1, y_2, y_3, y_4 annehmen, so werden die Coordinaten des „selben“ gleichfalls durch ein lineares Gleichungssystem mit den x, y, z verbunden sein. Zwischen ihm und dem früheren System auf pag. 2 können wir dann die x, y, z eliminieren. Wir finden als Resultat:

„Von einem Coordinatentetraeder zum anderen geht man durch homogene lineare Substitutionen mit nicht verschwindender Determinante über.“

Wir fügen noch hinzu:

„Das gewöhnliche Coordinatensystem der x, y, z ist als ein besonderer Fall des Tetraedercoordinatensystems anzusehen, sobald wir nur statt x, y, z $\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}$ schreiben und der Gl. $t=0$ entsprechend die ∞ weite Ebene als 4^{te} Coordinatenebene gelten lassen.“

Wir wollen nun weiter von der Ebene sprechen. Welche Coordinaten werden wir der Ebene ertheilen? In den Punktcoordinaten ist die Ebene dargestellt durch die lineare Gleichung: $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0$. Die Coefficienten dieser Gleichung u_1, u_2, u_3, u_4 , d. h. ihre Verhältnisse betrachten wir dann als die „Coordinaten“ dieser Ebene.

Wir sind bei dieser Ableitung natürlich sehr einseitig verfahren, indem wir den Punkt bevorzugt haben. Man könnte umgekehrt auch von der Ebene und der Bestimmung ihrer Coordinaten ausgehen und durch die

Gleichung: $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0$ die Punktkoordinaten definiert denken. Streng logisch verfahrend können wir auch die Coordinaten u und x unabhängig von einander als Doppelverhältnisse einführen; die Gleichung $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0$ giebt also dann die Bedingung für die „vereinigte Lage“ von Punkt und Ebene. Wir werden fernerhin diese Gl. abkürzend durch $u_x = 0$ bezeichnen.

Und dann fahren wir fort:

Halten wir in der Gl. $u_x = 0$ die u fest und lassen die x laufen, so haben wir alle Punkte, die in einer festen Ebene liegen und wir sagen: die Ebene wird durch eine Gleichung in Punktkoordinaten dargestellt.

Halten wir umgekehrt die x fest und lassen die u laufen, so haben wir alle Ebenen, die durch einen festen Punkt gehen und wir sagen: dieser Punkt wird durch die Gl. $u_x = 0$ in Ebenencoordinaten dargestellt.

Wir wollen ferner bemerken, daß Ebenencoordinaten und Punktkoordinaten sogenannte contragrediente Variablen sind. Wenn ich nämlich die Punktkoordinaten durch eine homogene Substitution umändere:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + a_{14} x_4, \\ \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + a_{24} x_4, \\ \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_3 = a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + a_{34} x_4, \\ \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_4 = a_{41} x_1 + a_{42} x_2 + a_{43} x_3 + a_{44} x_4, \\ \end{cases}$$

dann wird jedes System von 4 Größen, das sich in der,

selben Weise substituiert, ein System congruenter Variablen genannt werden, im Gegensatz hierzu gehen die neuen Ebenencoordinaten v_1, v_2, v_3, v_4 bei einem solchen Prozeß nicht aus den alten Ebenencoordinaten durch dieselbe Substitution hervor. Man muß die Substitution vielmehr so einrichten, daß:

$$v_1 y_1 + v_2 y_2 + v_3 y_3 + v_4 y_4 = u_x \text{ wird.}$$

Die hieraus sich ergebende Abhängigkeit der u und v nennt man die transponierte Substitution, die Variablen u und v in Bezug auf x und y dagegen „contragrediente Variable“. Allgemein werden wir sagen: „Die Contragredienz zwischen Ebenencoordinaten und Punktkoordinaten findet gerade darin ihren Ausdruck, daß bei jeder linearen Substitution der Ausdruck u_x in den entsprechenden Ausdruck v_y übergeht.“ Nun noch eine kleine Frage von ganz elementarem Charakter. Wie berechnen wir diejenige Ebene u , die durch die 3 gegebenen Punkte x, y, z geht? Es muß sein:

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0,$$

$$u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3 + u_4 y_4 = 0,$$

$$u_1 z_1 + u_2 z_2 + u_3 z_3 + u_4 z_4 = 0.$$

Aus diesen drei linearen Gleichungen ergeben sich die Verhältnisse der Coordinaten u unmittelbar als:

$$u_1 : u_2 : u_3 : u_4 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix};$$

d. h. als die Verhältnisse der 4 Unterdeterminanten dieser Matrix.

Diesem sehr einfachen Satz wollen wir eine specielle Bedeutung geben, indem wir interpretieren:

„Die Ebenencoordinaten sind abkürzende Benennungen für die dreigliedrigen Unterdeterminanten aus den Coordinaten dreier Punkte.“

In ganz analoger Weise stellt sich diesem Satz der folgende an die Seite, den wir erhalten, wenn wir von Ebenencoordinaten ausgehen:

„Die Punktkoordinaten sind abgekürzte Benennungen für die dreigliedrigen Determinanten aus den Ebenencoordinaten dreier Ebenen.“

In dieser Formulierung liegt zugleich, daß die Ebene unverändert bleibt, wenn man die 3 Punkte x, y, z durch irgend welche linearen Verbindungen $\lambda x + \mu y + \nu z$ ersetzt. Daß nämlich zunächst jeder solche Punkt $\lambda x + \mu y + \nu z$ in der Ebene u liegt, ergibt sich direkt aus den 3 Gleichungen der letzten Seite. Dem aus ihnen folgt:

$\lambda u_x + \mu u_y + \nu u_z = 0$ oder anders geschrieben:
 $u_{\lambda x + \mu y + \nu z} = 0$. Um unsere Behauptung allgemein nachzuweisen, denken wir einmal, wir hätten statt der drei Punkte x, y, z beliebige drei lineare Verbindungen derselben eingeführt.

Dann würde also sein:

$$u_1 : u_2 : u_3 : u_4 =$$

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 x_1 + \mu_1 y_1 + \nu_1 z_1 & \lambda_1 x_2 + \mu_1 y_2 + \nu_1 z_1 & \lambda_1 x_3 + \mu_1 y_3 + \nu_1 z_3 & \lambda_1 x_4 + \mu_1 y_4 + \nu_1 z_4 \\ \lambda_2 x_1 + \mu_2 y_1 + \nu_2 z_1 & \lambda_2 x_2 + \mu_2 y_2 + \nu_2 z_2 & \lambda_2 x_3 + \mu_2 y_3 + \nu_2 z_3 & \lambda_2 x_4 + \mu_2 y_4 + \nu_2 z_4 \\ \lambda_3 x_1 + \mu_3 y_1 + \nu_3 z_1 & \lambda_3 x_2 + \mu_3 y_2 + \nu_3 z_2 & \lambda_3 x_3 + \mu_3 y_3 + \nu_3 z_3 & \lambda_3 x_4 + \mu_3 y_4 + \nu_3 z_4 \end{vmatrix}$$

„Wir haben nun nachzuweisen, daß man auf dieselben Ebenencoordinaten u wie vorhin kommt, wenn man in dieser Weise statt der 3 Punkte x, y, z irgend 3 mit ihnen linear verknüpfte Punkte einführt.“ Wir führen den Beweis algebraisch. Fassen wir einmal die erste Determinante obiger Matrix ins Auge, so erkennen wir leicht, daß dieselbe nach dem Determinanten-Multiplikationsgesetz gleich dem Produkt:

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \text{ ist.}$$

„In der That erweist sich daher, wenn wir aus der Matrix der Punkte $\lambda x + \mu y + \nu z$ die 4 möglichen Determinanten bilden, jede derselben gleich der entsprechenden Determinante der x, y, z selbst, multipliziert mit der Determinante der λ, μ, ν .“ q. e. d.

Diese ganze Betrachtung haben wir gegeben, um uns einer neuen Frage zuzuwenden, die speciell erst

in der Raumgeometrie auftritt, für die in der Geometrie der Ebene noch kein Platz ist. Wir werden hier nicht nur Punkte und Ebenen, sondern noch eine Mittelstufe, nämlich gerade Linien einzuführen haben.

Eine gerade Linie, die 2 Punkte verbindet, erscheint als der Träger der Punkte $\lambda x + \mu y$; ebenso ist eine gerade Linie, die als Schnitt zweier Ebenen u und v gegeben ist, allen Ebenen $\lambda u + \mu v$ gemeinsam.

Es ist nun die Frage, was wir als Linienkoordinaten im Raume ansehen wollen. Hier haben wir die Antwort zu geben, die Grassmann (1844) und unabhängig von ihm Plücker (1847) und Cayley (1857) aufgestellt haben. Alle drei kamen auf verschiedenem Wege zu demselben Resultat. Grassmann, dessen Namen ich im vorigen Semester noch nicht genannt habe, der aber zu den hervorragendsten Geometern dieses Jahrhunderts gehört, hat 1844 ein Werk erscheinen lassen, „Die Ausdehnungslehre“, das 1862 noch einmal in wesentlich umgeänderter Darstellung in 2^{ter} Auflage verlegt wurde. Grassmann geht bei seiner Darstellung davon aus, daß die Beschränkung unserer Anschauung auf 2 oder 3 Dimensionen für die Begriffsbildung jedenfalls nur etwas Zufälliges ist. Demnach führen

wir sogleich n homogene Variable ein, $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, durch die wir „einen Punkt X “ in einem mehrfach ausgedehnten Raum festgelegt denken. (W. Es ist dies natürlich für uns wie für Grassmann nur eine bildliche Sprechweise ohne irgend welche metaphysische Bedeutung).

Nun faßte Grassmann den Gedanken, in dem mehrfach ausgedehnten Raume sich gerade so eine Geometrie zu construieren, wie es bei der analytischen Geometrie bei 2 und 3 Dimensionen geschieht. Den Inbegriff dieser Sätze bezeichnet er als „Ausdehnungslehre.“ *) In diesem mehrfach ausgedehnten Raume sieht sich nun Grassmann veranlaßt, eine Reihe von Grundgebilden zu betrachten; als solche stellt er die folgenden auf:

- 1, den einzelnen Punkt $\lambda' X'$ selber.
- 2, dasjenige Gebilde, das sich aus 2 Punkten durch lineare Verbindung erzeugen läßt, das also alle Punkte $\lambda' X' + \lambda'' X''$ trägt. (Demselben entspricht in unserem gewöhnlichen Raume demnach die gerade Linie).
- 3, dann dasjenige Gebilde, das drei Punkte und ihre linearen Verbindungen enthält:

*) Grassmann wollte nicht den Ausdruck: „Hypergeometrie“ oder „Geometrie höherer Räume“ gebrauchen, und wählte eben darum diese Bezeichnung „Ausdehnungslehre“, die einer Mißdeutung weniger ausgesetzt ist.

$\lambda'x' + \lambda''x'' + \lambda'''x'''$. (entspr. der Ebene im gewöhnlichen Raume).

In derselben Weise fortgefahren, ergeben sich die Gebilde, die 4 Punkte, 5 Punkte u. s. w. enthalten sollen, schließlich $n-1$) dasjenige Gebilde, welches die Punkte trägt:

$\lambda'x' + \lambda''x'' + \lambda'''x''' + \dots + \lambda^{(n-1)}x^{(n-1)}$, wo die λ beliebig zu variieren, die x dagegen konstant sind. Weiter unten, p. 19., wird dieses Gebilde als „Ebene“ bezeichnet.

Wollten wir endlich nicht $n-1$, sondern n Punkte zusammenstellen, so würden wir den Gesamt-raum erhalten.

Dies sind also die verschiedenen Stufen von Gebilden, die Graßmann im $(n-1)$ fach ausgedehnten Raume unterscheidet [Graßmann'sche Stufen]. Er sieht sich jetzt vor die Frage gestellt: Wir werden die einzelnen Gebilde der ersten, zweiten, dritten u. s. w. Stufe durch Coordinaten zu bestimmen sein? Im speciellen in Rücksicht auf den dreidimensionalen Raum:

Wie wollen wir die gerade Linie festlegen? — d. h. unsere soeben formulierte Frage. Und hier stellt nun Graßmann folgendes allgemeine Princip auf (auf welches wir durch unsere Bemerkung über den Charakter der Ebenencoordinaten vorbereitet sind):

„Um das einzelne Gebilde der verschiedenen Stufen durch Coordinaten festzulegen (N.B. durch homogene

Coordinaten), betrachte man einfach die Determinanten derjenigen Matrix

$$\begin{vmatrix} x'_1 & x'_2 & \dots & x'_n \\ x''_1 & x''_2 & \dots & x''_n \end{vmatrix},$$

welche sich aus den Coordinaten der erzeugenden Punkte aufbauen läßt." Wir fügen sogleich hinzu:

"Diese Coordinatenwahl von Grassmann erscheint als durchaus zulässig, weil man von einem gemeinsamen Faktor abgesehen, der bei homogenen Coordinaten nicht in Betracht kommt, genau auf dieselben Coordinaten des Gebildes kommt, wenn man statt der anfänglich gewählten Punkte x', x'' etc. irgend welche aus ihnen durch lineare Verknüpfung hervorgehende Punkte zur Erzeugung des Gebildes zu Grunde legt."

Von dem allgemeinen Grassmann'schen Principe machen wir nun Anwendung auf die gerade Linie des (dreidimensionalen) Raumes. Dieselbe ist definiert als das Gebilde, welches die Punkte x, y und $\lambda x + \mu y$ trägt. Wir bilden die Matrix

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix}$$

Dieselbe repräsentiert offenbar 6 Determinanten. Wir wollen zur Abkürzung einführen für $x_\alpha y_\beta - y_\alpha x_\beta$ die Bezeichnung $p_{\alpha\beta}$: es folgt, wie leicht ersichtlich, sofort $p_{\alpha\beta} = -p_{\beta\alpha}$. Also lauten die 6 zu unterscheidenden Determinanten:

$p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{34}, p_{42}, p_{23}$. Wenn wir dann anstatt x und y $\lambda x + \mu y$ wählen u. aus der entsprechenden Matrix:

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 x_1 + \mu_1 y_1 & \lambda_1 x_2 + \mu_1 y_2 & \lambda_1 x_3 + \mu_1 y_3 & \lambda_1 x_4 + \mu_1 y_4 \\ \lambda_2 x_1 + \mu_2 y_1 & \lambda_2 x_2 + \mu_2 y_2 & \lambda_2 x_3 + \mu_2 y_3 & \lambda_2 x_4 + \mu_2 y_4 \end{vmatrix}$$

die Determinanten p'_{ik} bilden, so erkennen wir leicht, daß die Beziehung besteht:

$$p'_{ik} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 \end{vmatrix} \cdot p_{ik}.$$

Wir sehen so den auf der Seite 12 ausgesprochenen allgemeinen Satz hier bestätigt. Diese Größen p_{ik} oder genauer die Verhältnisse derselben wird man nun nach Grassmann als die Liniencoordinaten einführen: $p_{12} : p_{13} : p_{14} : p_{34} : p_{42} : p_{23}$.

Was nun historisch die Grassmann'sche Ausführung dieser Verhältnisse in seiner „Ausdehnungslehre“ anbetrifft, so wollen wir bemerken, daß dieselben in einer eigenartigen und schwer verständlichen Sprache geschrieben ist. Grassmann hat einmal das Bestreben, alle termini technici zu verdeutschen: So spricht er z.B. vom „Spath“ statt vom „Parallelepiped“ (vergl. Mineralogie), von der „Abschattung“ statt „Projection“ u.s.w. Die innere Schwierigkeit liegt ferner darin begründet, daß er wenig Formeln gebraucht, sondern alles vermittelst „Abschattungen“ und entspre-

chender bildlicher Redeweisen auch bei mehr als drei Dimensionen ausführt. Dazu überall ein eigen- thümlicher philosophisch-didaktischer Standpunkt. Diesem Umstande ist es denn auch zuzuschreiben, daß das Buch von 1844 zunächst sehr wenig gelesen wurde. Nicht viel besser ist es zuerst der Auflage von 1862 gegangen, bei der Grassmann das formale Element zu sehr in den Vordergrund gestellt hat. Es hat et- wa 25 Jahre gedauert, bis man etwas mehr auf die Ideen von Grassmann zu achten begann.

Plücker hat 1847 in seinem „System der Geome- trie des Raumes“ gleichfalls die Liniencoordina- ten bereits erwähnt; doch hat er diese Ideen erst später weiter bearbeitet. Diese Ideen sind weniger allgemein, sondern knüpfen an die concreten Ver- hältnisse unseres Raumes an. Sie finden sich im Zusammenhange dargelegt in dem 1868-69 veröf- fentlichten Werke: „Die neue Geometrie des Raumes, ge- gründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raum- element.“

Erst durch diese Arbeit ist die Sache zum allgemeinen Bewußtsein gekommen; man spricht daher gern von „Plücker'schen Liniencoordinationen“. Plücker hat um die Entwicklung des Coordinatenbegriffs der neueren Geo- metrie (Ebenencoordinationen, homogene Coordinaten)

so große Verdienste, daß man ihm wenig abbricht, wenn man feststellt, daß hinsichtlich der Einführung der p, β Grassmann die Priorität hat. Wer sich für die Einzelheiten dieser Entwicklung interessiert, sei auf die Gedächtnisrede auf Plücker hingewiesen, die Clebsch in der hiesigen Societät gehalten hat.

[Zum Gedächtnis an Julius Plücker, 1871.]

Betrachten wir nun unsere Linienkoordinaten genauer. Von wie viel Konstanten hängt die gerade Linie im Raum ab? Da die gerade Linie jedesmal durch 2 Punkte, die wir in zwei Coordinatenebenen wählen können, bestimmt ist, so sind demnach 4 von einander unabhängige Größen zur Festlegung der Linie nöthig.

Wenn wir homogene Variable haben wollen, so werden wir die gerade Linie durch 5 homogene Variable zu bestimmen haben. Wir haben aber 6 Größen p, β zur Festlegung der geraden Linie vor uns. Folglich werden diese 6 Größen nicht von einander unabhängig sein, sondern sie werden einer Bedingungsgleichung genügen müssen. Diese Bedingungsgleichung ist vom 2^{ten} Grade in den p, β . Man erhält sie, indem man sich die 4 gliedrige Determinante bildet, die sich durch Wiederholung der Matrix ergibt. Dieselbe ist sicher gleich 0. Wir haben also:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese 4 gliedrige Determinante kann man nun nach zweigliedrigen Unterdeterminanten ordnen, indem man jede Determinante der ersten beiden Zeilen mit der zugehörigen Determinante der letzten beiden Zeilen multipliziert. Man erhält so leicht $(p_{12} p_{34} + p_{13} p_{42} + p_{14} p_{23}) = 0$. Diese Identität bezeichnen wir abkürzend mit $P = 0$. Somit haben wir das Resultat:

Zwischen den homogenen Coordinaten $p_{\alpha\beta}$ der Raumgeraden besteht die Identität $P = 0$ vermöge deren die 6 $p_{\alpha\beta}$ auf 5 unabhängige homogene Größen zurückkommen, wie es sein muß, da die Raumgerade von 4 Konstanten abhängt. Deshalb kann des weiteren keine fernere Identität, insbesondere keine lineare Identität zwischen den $p_{\alpha\beta}$ bestehen.

Nun versteht es sich wohl von selbst, daß neben dieser ersten Einführung der Liniencoordinaten sich eine zweite stellt, die sich ergibt, wenn man von Ebenencoordinaten ausgeht, statt von Punktcordinaten. Es seien durch u und v zwei Ebenen bezeichnet, die sich in einer Geraden schneiden; es wird

dann eine jede Ebene $\lambda u, \mu v$ durch dieselbe Gerade hin-
durchgehen. Wir bilden wieder die Matrix:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{vmatrix}$$

deren Determinanten wir mit $q_{\alpha\beta} = u_\alpha v_\beta - v_\alpha u_\beta = -q_{\beta\alpha}$ bezeichnen wollen. Dann ist ganz klar:

„Indem wir mit Ebenencoordinaten beginnen, können wir der geraden Linie in neuer Weise 6 Coor-
dinaten beilegen: $q_{12}, q_{13}, q_{14}, q_{34}, q_{42}, q_{23}$, zwischen
denen die quadratische Relation $q_{12} q_{34} + q_{13} q_{42} + q_{14} q_{23} = 0$
oder abgekürzt $Q = 0$ besteht, während sie übrigenfalls
linear unabhängig sind.“

Nun entsteht natürlich die Frage: Wie verhalten
sich die 6 Coordinaten p_{ik} zu den 6 Coordinaten q_{ik} ?
Sind dies etwa vielleicht bis auf die Reihenfolge diesel-
ben Größen? Ob wir hierauf näher eingehen, wollen
wir an folgende Analogie erinnern: Die Punktkoor-
dinaten sind entweder als eingliedrige Determinanten
aus Punktkoordinaten oder als dreigliedrige Determinanten
aus Ebenencoordinaten definiert und ebenso können
wir die Ebenencoordinaten entweder als eingliedrige
Determinanten aus Ebenencoordinaten oder als
dreigliedrige Determinanten aus Punktkoordinaten auffassen.

Beide Male bekommen wir in jedem Falle dieselben
Größen. So sind, behaupten wir, die Liniencoordinaten

p und q , die beziehungsweise als zweigliedrige Determinanten der Punkt- resp. der Ebenencoordinaten definiert sind, ebenfalls wieder dieselben Größen, und zwar bestehen im einzelnen die Beziehungen:

$$\mu \cdot q_{12} = p_{34} ; \mu \cdot q_{34} = p_{12} ;$$

$$\mu \cdot q_{13} = p_{42} ; \mu \cdot q_{42} = p_{13} ;$$

$$\mu \cdot q_{14} = p_{23} ; \mu \cdot q_{23} = p_{14} .$$

Um wir diese Behauptung nachweisen, wollen wir vorerst gleich „den allgemeinen Grassmann'schen Determinantensatz“ aussprechen, von dem unser Satz ein specieller Fall ist.

Durch die lineare Kombination der k Punkte: $x', x'', \dots, x^{(k)}$ setzen wir uns ein lineares Gebilde zusammen im Raume der n Variablen, deren Coordinaten die Unterdeterminanten k^{ter} Ordnung $p_{\alpha, \beta, \gamma}$ der betreffenden Matrix sind. Andererseits können wir uns dieses lineare Gebilde auch durch Ebenen bestimmt denken und zwar durch $n-k$ Ebenen mit den Coordinaten $u', u'', \dots, u^{(n-k)}$. Aus ihnen bilden wir die Unterdeterminanten $(n-k)^{\text{ter}}$ Ordnung, die wir wieder als Coordinaten für das lineare Gebilde wählen. Es ist leicht ersichtlich, daß die Anzahl der p und die Anzahl der q übereinstimmt.

(da $u_{(k)} = u_{(n-k)}$)

Beziehen sich nun die p und q auf dasselbe lineare

Gebilde, so gilt für dieselben nach Grassmann die Identität:

$$u \cdot \rho_{\alpha' \beta' \gamma' \dots} = \pm \rho_{\alpha \beta \gamma \dots}$$

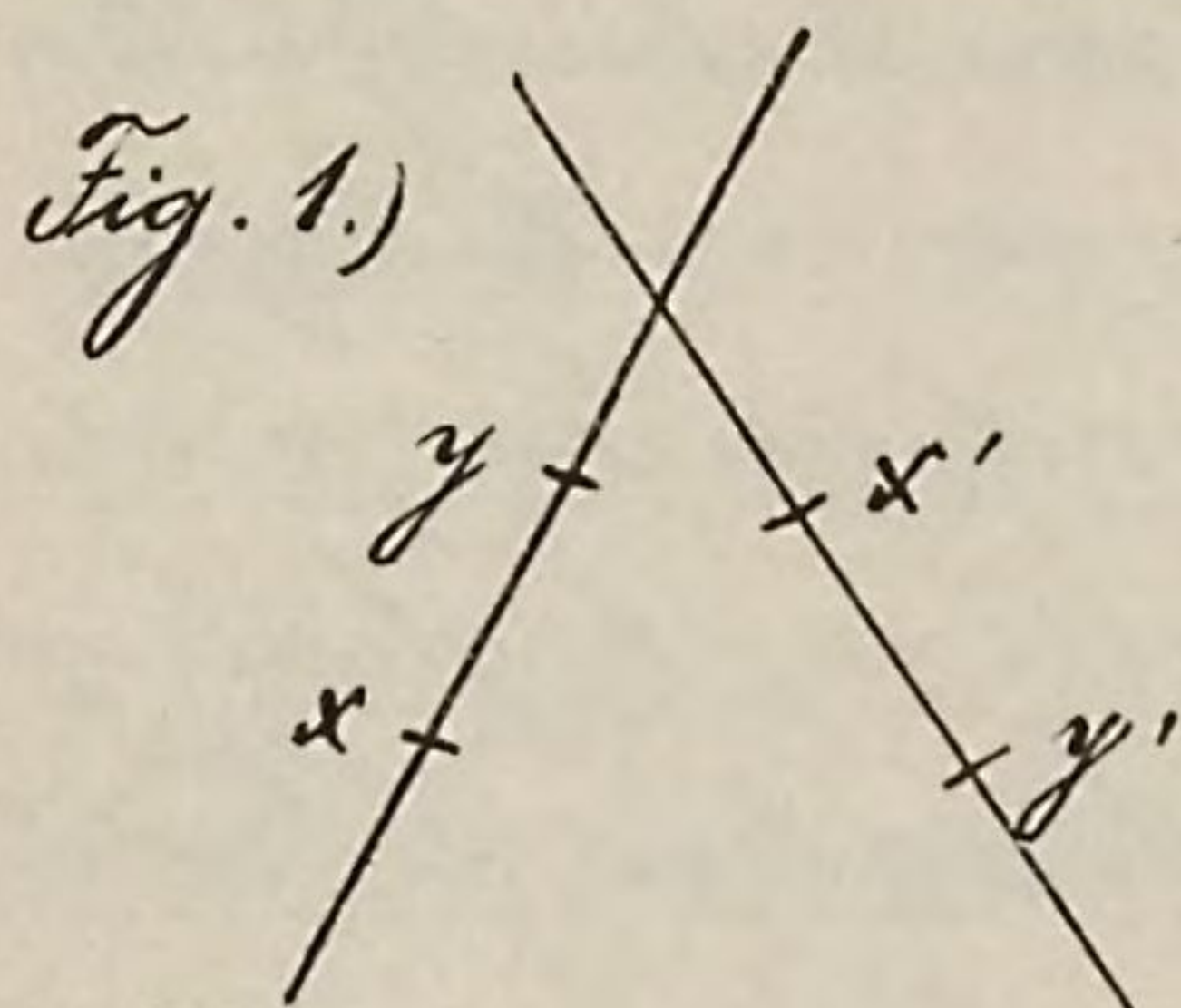
(das $\pm$ Zeichen ist hinzugesetzt, um die Reihenfolge $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ unentschieden zu lassen), die wir mit den Worten begleiten:

Wenn ich für dasselbe lineare Gebilde einerseits k gliedrige Determinanten aus Punktkoordinaten p als Coordinaten berechne, andererseits $n - k$ gliedrige Determinanten q aus Ebenenkoordinaten als Coordinaten berechne, dann sind die p mit den q proportional, so zwar, daß jedem p nach gehöriger Fixierung der Vorzeichen immer dasjenige q entspricht, welches mit ihm zusammen sämtliche Indices $1, 2, 3, \dots$ bis n aufweist.

Diesen allgemeinen Grassmann'schen Satz wollen wir nun in dem speciellen Falle der Liniencoordinaten beweisen und zwar in der Weise, daß wir die Bedingung ins Auge fassen, unter der sich 2 gerade Linien schneiden. Diese Bedingung wollen wir nämlich in den p u. q auf alle mögliche Weise ausdrücken. Die Vergleichung dieser verschiedenen Ausdrucksweisen wird uns dann gerade liefern, was wir brauchen. Wir können nun auf 4 verschiedene Weisen die betreffende Bedingung in Tw Satz bringen:

1.) Die beiden geraden Linien seien festgelegt entsprechend durch die Punkte x, y und x', y' , (v. Figur).

Sollen dieselben sich schneiden, so muß sich durch die 4 Punkte eine Ebene hindurchlegen lassen, d. h. es muß sein



$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 & x'_4 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 & y'_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Wenn wir nun diese 4-gliedrige Determinante in derselben Weise, wie es bereits früher geschehen, nach 2-gliedrigen Unterdeterminanten entwickeln, so ergibt sich folgendes:

$$p_{12} p'_{34} + p_{13} p'_{42} + p_{14} p'_{23} + p_{23} p'_{14} + p_{24} p'_{13} + p_{34} p'_{12} = 0.$$

Dies ist die erste Form der Bedingung, für den Schnitt zweier geraden Linien.

2.) Wir können nun genau die dualistische Betrachtung anstellen. Es seien 4 Ebenen u, v und u', v' gegeben, wann schneiden sich die von u mit v und von u' mit v' gebildeten Geraden in einem Punkte? Dann und nur dann, wenn die 4 Ebenen einen Punkt gemeinsam haben. Es muß daher sein:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ u'_1 & u'_2 & u'_3 & u'_4 \\ v'_1 & v'_2 & v'_3 & v'_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Hieraus ergibt sich als zweiter Zusatz der verlangten Bedingung:

$$q_{12} q'_{34} + q_{13} q'_{42} + q_{14} q'_{23} + q_{34} q'_{12} + q_{42} q'_{13} + q_{23} q'_{14} = 0. *$$

Diesen beiden ersten Formeln können wir nun noch zwei weitere entgegenstellen:

3. Wir erhalten nämlich eine weitere Bedingung für den Schnitt zweier Geraden, indem wir die eine Gerade als Verbindende zweier Punkte x', y' , die andere als Schnitt zweier Ebenen u und v gegeben denken. In dem Büschel der beiden Ebenen u_x und v_x , nämlich $u_x + \lambda v_x = 0$ wird sich dann stets eine Ebene finden, die durch den Punkt x hindurchgeht: $u_{x'} + \lambda v_{x'} = 0$ und eine zweite, die durch den Punkt y hindurchgeht: $u_{y'} + \lambda v_{y'} = 0$. Sollen die beiden geraden Linien sich nun schneiden, so müssen diese Ebenen identisch sein, und so kommt die Bedingung des Schneidens darauf hinaus, daß aus den beiden letzten Gleichungen derselbe Werth des λ sich ergibt. Es muß daher sein:

$$u_{x'} v_{y'} - v_{x'} u_{y'} = 0 \text{ oder ausführlich geschrieben:} \\ (u_1 x'_1 + u_2 x'_2 + u_3 x'_3 + u_4 x'_4) \cdot (v_1 y'_1 + v_2 y'_2 + v_3 y'_3 + v_4 y'_4) - \\ (v_1 x'_1 + v_2 x'_2 + v_3 x'_3 + v_4 x'_4) \cdot (u_1 y'_1 + u_2 y'_2 + u_3 y'_3 + u_4 y'_4) = 0.$$

*) Diese Bedingung können wir abkürzend darstellen durch
 1.) $\sum p'_{\alpha\beta} \frac{\partial P}{\partial p_{\alpha\beta}} = 0$ resp. 2.) $\sum q'_{\alpha\beta} \frac{\partial Q}{\partial q_{\alpha\beta}} = 0$, wo P und Q
 die auf pag. 17 eingeführten Ausdrücke 2^{ten} Grades sind.

Nach dem Ausmultiplizieren ergibt sich beim zweckmäßigen Zusammenfassen der einzelnen Summanden das einfache Resultat, daß $p'_{\alpha\beta} = x'_\alpha y'_\beta - x'_\beta y'_\alpha$ immer multipliziert mit $q_{\alpha\beta} = u_\alpha v_\beta - u_\beta v_\alpha$ vorkommt. In Worten: Es ist jede Determinante aus den $x'y'$ multipliziert mit der entsprechenden Determinante aus den u, v , so daß unsere Bedingungsgleichung lautet: 3.) $\sum p'_{\alpha\beta} q_{\alpha\beta} = 0$.

4.) Diese neue Bedingung des Schneidens zweier Geraden giebt uns sofort, indem wir die geraden Linien entsprechend miteinander vertauschen, als 4^{te} Form der Bedingung:

$$4.) \sum q'_{\alpha\beta} \cdot p_{\alpha\beta} = 0.$$

Vergleichen wir nun diese beiden Formeln mit denen der vorigen Stunde; wir finden, es muß gleichzeitig sein:

$$1.) \sum p'_{\alpha\beta} \cdot \frac{\partial P}{\partial p_{\alpha\beta}} = 0 \quad . \quad 3.) \sum p'_{\alpha\beta} q_{\alpha\beta} = 0.$$

Wir schließen hieraus, da in den Formeln 1. u. 3. die $p'_{\alpha\beta}$ von Hause aus linear unabhängige Coordinaten bedeuten, während doch 1. u. 3. geometrisch für die Linie $p'_{\alpha\beta}$ dieselbe Bedingung aussagen, daß die Coefficienten, mit denen in 1. die $p'_{\alpha\beta}$ multipliziert sind, mit den entsprechenden Coefficienten von 3 proportional sein müssen, so daß wir also schreiben können:

$$u \cdot q_{\alpha\beta} = \frac{\partial P}{\partial p_{\alpha\beta}}.$$

Analog folgt aus der Vergleichung der Formeln
2, und 4, :

$$\mu' \cdot p_{\alpha\beta} = \frac{\partial Q}{\partial q_{\alpha\beta}}.$$

Diese Beziehungen sagen also aus, dass die Coordina-
ten q , mit den p bis auf die Reihenfolge und einen
nothwendig unbestimmt bleibenden Proportiona-
litätsfaktor übereinstimmen.

Jetzt wollen wir etwas näher auf die Plücker'schen
Ideen eingehen, die der Raumgeometrie von 1868/69
zu Grunde liegen. Wir können die Betrachtungen,
die wir hier meinen, zweckmäßig durch einen Hin-
weis auf analoge Betrachtungen bei der Anwendung
von Punktcoordinaten uns näher führen. Wenn
wir eine Gleichung zwischen Punktcoordinaten auf-
stellen, so wissen wir, wird hierdurch eine Fläche, bei
2 Gleichungen eine Curve, bei 3 Gleichungen ein
Schnittpunktsystem dargestellt. In gleicher Weise
stellt nun Plücker die Frage auf, was wird durch
eine, was durch 2, was durch 3, endlich durch 4
Gleichungen zwischen Liniencoordinaten definiert?
Mehr als 4 Gleichungen dürfen wir natürlich nicht
aufstellen, da ja zwischen unseren 6 homogenen
Coordinaten immer noch ausserdem die Identitäts-
gleichung $P = 0$, resp. $Q = 0$ zu gelten hat.

Es möge also gegeben sein die eine Gleichung $\Omega = 0$, die homogen in den Linienkoordinaten ist. Was stellt diese Gleichung dar? Ja, es gibt überhaupt ∞^4 gerade Linien, aus diesen greift die eine Gleichung $\Omega = 0$ ∞^3 gerade Linien heraus, die immer noch den Raum vollständig ausfüllen. Eine solche Zusammenfassung nennt Plücker einen Komplex von Linien.

Haben wir die weiteren 2 Gleichungen $\Omega = 0$ und $\Omega' = 0$, so bestimmen dieselben eine zweifach unendliche Mannigfaltigkeit von geraden Linien, die auch noch den ganzen Raum ausfüllen; denn durch jeden Punkt desselben geht allgemein zu mindest immer noch eine (oder auch mehrere) gerade Linien der Mannigfaltigkeit. Wir können sagen, daß die ∞^3 Punkte des Raumes in bestimmter Weise in ∞^2 geraden Linien zusammengefaßt sind. Diesen Subgriff von Linien nennt Plücker eine Congruenz. [Es ist auch noch der ältere Name „Strahlensystem“ üblich, doch ist derselbe wenig passend, da ja auch ein Liniencomplex eigentlich ein „Strahlensystem“ abgibt.]

Nehmen wir nun 3 Gleichungen: $\Omega = 0, \Omega' = 0, \Omega'' = 0$ an, so bestimmen dieselben ∞^1 gerade Linien, welche eine Fläche im Raume, eine sogenannte

„Linienfläche“ liefern.

Wollte man endlich 4 Gleichungen:

$\Omega = 0, \Omega' = 0, \Omega'' = 0, \Omega''' = 0$ zusammenstellen, so würde dies eine endliche Anzahl $[\infty^0]$ gerade Linien geben, eine Zusammenfassung, für die wir keinen besonderen Namen haben.

Nun wollen wir einen Schritt weiter gehen, indem wir in allen Fällen die Gleichung als linear voraussetzen; wir bekommen so „einen linearen Complex, eine lineare Congruenz“ u. s. fort. Wir müssen nun etwas näher auf diese Gebilde eingehen, wobei wir uns jedoch auf die Hervorhebung einiger Haupteigenschaften derselben beschränken werden, da ein genaueres Eingehen natürlich zu viel Zeit beanspruchen würde.

Es sei also gegeben eine einzelne lineare Gleichung: $\sum a_{\alpha\beta} p_{\alpha\beta} = 0$. Bei einem solchen linearen Complex verdient der Ausdruck

$a_{12} a_{34} + a_{13} a_{42} + a_{14} a_{23}$, den wir abkürzend mit A bezeichnen, besonderes Interesse. Derselbe hat nämlich eine Bedeutung, die vom Coordinatensystem unabhängig ist, mit anderen Worten: er ist eine Invariante des linearen Complexes. Wir beschäftigen uns besonders mit dem speciellen Fall des linearen Complexes, in welchem die Invariante A verschwindet, also die Gleichung besteht:

$$a_{12} a_{34} + a_{13} a_{42} + a_{14} a_{23} = 0 \quad [\text{„Specieller lin. Complex.“}]$$

In diesem Falle können wir die $a_{\alpha\beta}$ selbst als Coordi-
naten einer festen geraden Linie ansehen, indem
wir setzen: $a_{\alpha\beta} = q'_{\alpha\beta}$. Wenn daß die Invariante
 $A = 0$ ist, kommt dann auf die Gleichung $Q' = 0$ hi-
naus, und irgend 6 Größen, die der Gleichung
 $Q' = 0$ genügen, können wir als Liniencoordina-
ten q' deuten. Die Gleichung des linearen Com-
plexes geht so über in:

$\sum q'_{\alpha\beta} \cdot p_{\alpha\beta} = 0$. dies ist aber die Bedingung, daß
die geraden Linien p und q' sich schneiden.

„Hiernach besteht der speciell lineare Complex
aus der Gesamtheit aller geraden Linien, wel-
che eine feste Raumgerade $q'_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}$ schneiden.

Gehen wir nun zu dem allgemeinen Falle des
linearen Complexes über. Setzen wir einmal für
 $p_{\alpha\beta}$ in die Gleichung derselben ein: $x_{\alpha} y_{\beta} - y_{\alpha} x_{\beta}$,
so bekommen wir:

$$\sum a_{\alpha\beta} (x_{\alpha} y_{\beta} - y_{\alpha} x_{\beta}) = 0.$$

Wenn wir hier den Punkt x etwa als gegeben den-
ken und nach solchen Punkten y fragen, die diese
Gleichung befriedigen, so besagt dies mit anderen
Worten:

„Die letzte Gleichung definiert bei festgehaltenem x dieje-
nigen Punkte, die mit x verbunden eine Linie des Com-
plexes bilden.“

Bemerken wir nun, daß dies eine lineare Gleichung für die y ist, die für $y = x$ befriedigt ist, so lesen wir unmittelbar aus unserer Gleichung ab, daß diese Punkte y eine Ebene ausfüllen, welche durch den Punkt x hindurchgeht. Als weitere Folgerung ergibt sich hieraus die Fundamentealeigenschaft des linearen Complexes:

„Im linearen Complex läuft durch jeden Punkt ein ebenes Strahlbüschel von Complexlinien.“

Wir können einen linearen Complex in Rücksicht auf die zuletzt angeführte Gleichung auch noch anders definieren. Setzen wir nämlich fest, daß $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$ sein soll, woraus von selbst folgt: $a_{\alpha\alpha} = 0$, dann können wir die Gleichung auch schreiben:

$$\sum_1^4 \sum_1^4 a_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta = 0.$$

„Eine solche Gleichung nennt man überhaupt eine bilineare Gleichung, und ihre linke Seite nennt man eine bilineare Form,“ und ist im speciellen, wie hier, $a_{\alpha\beta} = -a_{\beta\alpha}$, so nennt man die linke Seite eine schiefe bilineare Form. (forme gauche).

Unter Anwendung dieser Redeweise können wir dann sagen:

„Ein linearer Complex im Raume entsteht, wenn man eine schiefe bilineare Form der x und y gleich 0 setzt.“

Dieser Satz bezweckte zu zeigen, unter wie verschie-

denen Gesichtspunkten der lineare Complex, eines der wichtigsten Grundgebilde der projektiven Geometrie des Raumes, betrachtet werden kann. Näher hier auf die Gruppierung seiner Linien einzugehen, würde zu weit führen; wir bemerken nur noch, daß, wer sich dafür interessiert, in dem Vorlesungsheft, 18⁸⁴/85, „algebraische Curven und Flächen“, gegen Schluß kurz die Elemente der Liniengeometrie behandelt findet.

Lehen wir nun über zur linearen Congruenz; es sei gegeben:

$$\sum a_{\alpha\beta} p_{\alpha\beta} = 0; \quad \sum b_{\alpha\beta} p_{\alpha\beta} = 0.$$

Die diesen beiden Complexen gemeinsamen Linien sind nun natürlich auch dem ganzen Büschel:

$\lambda \sum a_{\alpha\beta} p_{\alpha\beta} + \mu \sum b_{\alpha\beta} p_{\alpha\beta} = 0$ gemeinsam. Wir wollen die Invariante A dieses allgemeinen Complexes berechnen. Wir setzen zur Abkürzung:

$$a_{12} a_{34} + a_{13} a_{42} + a_{14} a_{23} = A_{11} \text{ (Invariante des ersten Complexes)}$$

$$a_{12} b_{34} + b_{12} a_{34} + a_{13} b_{42} + b_{13} a_{42} + a_{14} b_{23} + b_{14} a_{23} = 2 A_{12}$$

$$b_{12} b_{34} + b_{13} b_{42} + b_{14} b_{23} = A_{22} \text{ (Invariante des zweiten Complexes).}$$

Es ist dann die Invariante eines beliebigen Complexes der obigen Schaar:

$$A = A_{11} \lambda^2 + 2 A_{12} \lambda \mu + A_{22} \mu^2.$$

Wir fragen nun: Gibt es unter diesen Complexen

$1 = \frac{-8A_{12} \pm \sqrt{4A_{12}^2 - 4A_{11}A_{22}}}{2A_{11}}$

der Schaar specielle Complexe mit verschwindender Invariante? Um dies zu beantworten, setzen wir $A = 0$ und bekommen eine quadratische Gleichung zwischen λ und μ :

$$A_{11} \lambda^2 + 2A_{12} \lambda \mu + A_{22} \mu^2 = 0.$$

In Betreff der linken Seite derselben, die eine binäre quadratische Form darstellt, haben wir im vorigen Semester gesehen, daß wir 3 Fälle gemäß des Verhaltens der Determinante der Coefficienten:

$$D = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} \text{ zu unterscheiden haben.}$$

$A_{11}A_{22} - A_{12}^2$

1, Es sei $D \neq 0$.

2, Es sei $D = 0$, jedoch nicht sämtliche Unterdeterminanten $A_{ik} = 0$.

3, Es seien sämtliche $A_{ik} = 0$.

Dann jeder Wurzel der Gleichung $A = 0$ ein specieller Complex entspricht, so erkennen wir sofort: Im ersten Falle ($D \neq 0$) sind in der Schaar der linearen Complexe 2 specielle enthalten, und die lineare Congruenz besteht aus allen Raumgeraden, welche 2 feste Leitlinien treffen. Wir fahren so gleich fort:

„Der zweite Fall ist ein Grenzfall, der aus dem allgemeinen entsteht, indem die beiden Leitlinien einander unendlich nahe rücken.“

Was besagt nun der dritte Fall ($A_{12} = 0$)?

In diesem Falle sind die beiden Complexe:

$\sum a_{\alpha\beta} p_{\alpha\beta} = 0$ und $\sum b_{\alpha\beta} p_{\alpha\beta} = 0$ selber specielle Complexe; der eine Complex besteht daher aus allen Raumgeraden, die eine feste Gerade schneiden, dasselbe gilt auch für den zweiten Complex. Die Bedingung $A_{12} = 0$ bedeutet dann, daß die beiden festen Geraden sich ihrerseits schneiden. Wir haben so den Satz:

Im dritten Falle, werden wir sagen, haben wir eine sogenannte „zerfallende Congruenz“, bestehend

1.) aus allen geraden Linien, die in einer festen Ebene liegen, sowie 2.) aus denjenigen, die durch einen in der Ebene enthaltenen festen Punkt hindurchlaufen.“

Diese Congruenz hat ∞ viele Leitlinien, das ist das ganze Bündel von Linien, die gleichzeitig in der Ebene liegen und durch den Punkt laufen.“

Nun haben wir noch einiges zu sagen über die Linienflächen, die drei Complexen angehören:

$$\sum a_{\alpha\beta} p_{\alpha\beta} = 0; \sum b_{\alpha\beta} p_{\alpha\beta} = 0; \sum c_{\alpha\beta} p_{\alpha\beta} = 0.$$

Diese 3 Complexe haben ∞^1 gemeinsame Linien, welche aber auch der dreigliedrigen Schaar von Complexen angehören:

$$\lambda \sum a_{\alpha\beta} p_{\alpha\beta} + \mu \sum b_{\alpha\beta} p_{\alpha\beta} + \nu \sum c_{\alpha\beta} p_{\alpha\beta} = 0.$$

Wir berechnen uns wieder die Invariante A für

einen beliebigen Complex dieser Schaar und fragen uns dann, ob wieder specielle Complexe in dieser Schaar enthalten sind. Es ist nun die Invariante:

$$A = \lambda^2 A_{11} + 2\lambda\mu A_{12} + \mu^2 A_{22} + 2\lambda\nu A_{13} + 2\mu\nu A_{23} + \nu^2 A_{33}.$$

Dieselbe ist eine ternäre quadratische Form der λ, μ, ν . Die Eintheilung dieser Formen gründet sich, wie wir im vorigen Semester lernten, auf die Determinante:

$$D = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} \quad \text{Wir wollen in dieser Hin-} \\ \text{sicht hier bloß auf den all-}$$

gemeinsten Fall $D \neq 0$ eingehen, um nicht zu viel Einzelheiten zu erörtern. In allen Fällen giebt es eine ganze Schaar specieller Complexe, die durch die Gleichung $A = 0$ bestimmt werden.

Hieraus folgt schon:

„Die ∞ vielen Erzeugenden unserer Linienfläche bezeugen ∞ vielen festen Leitlinien, welche durch unsere quadratische Gleichung des Nähern festgelegt werden.“

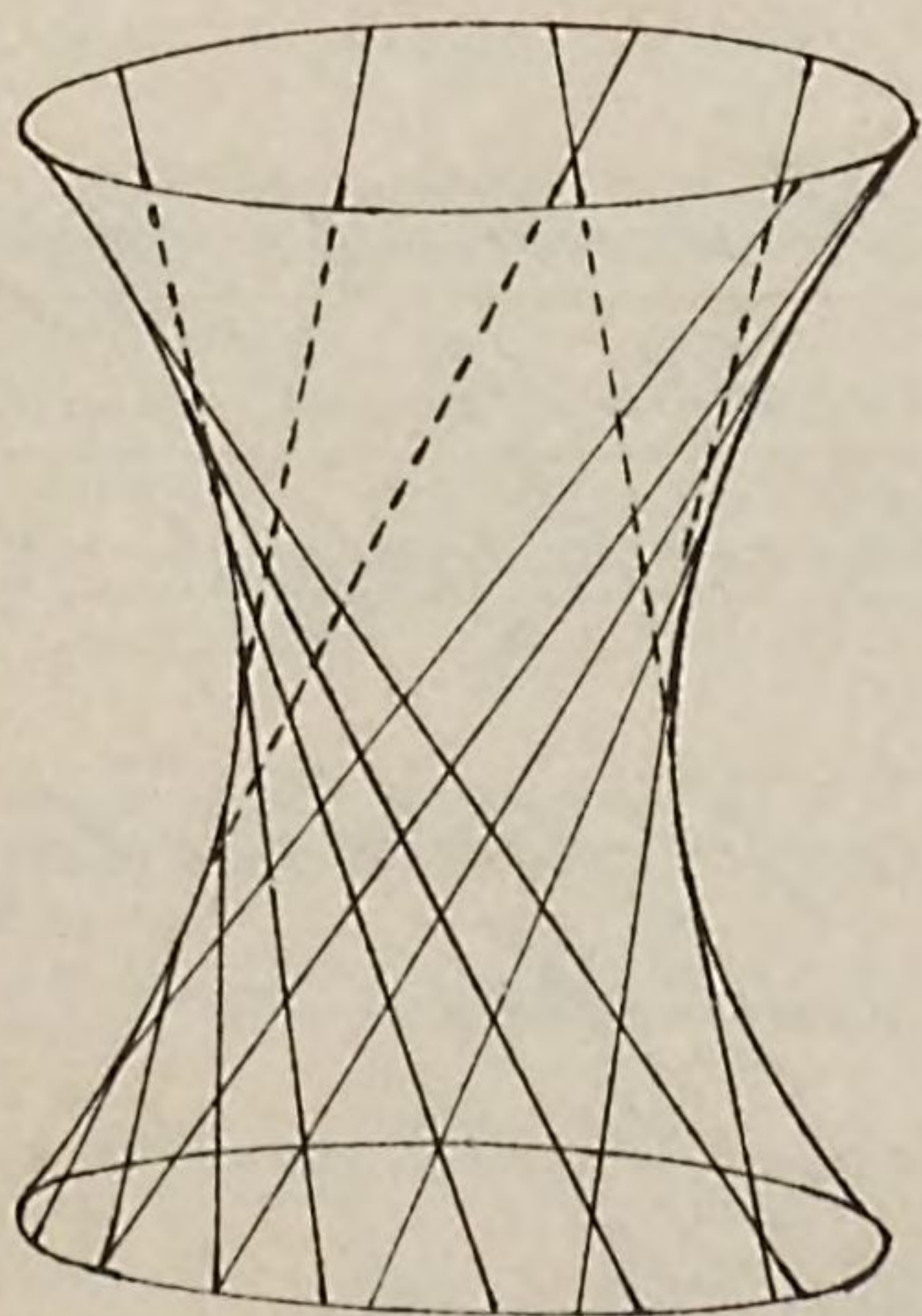
Ist nun insbesondere $D \neq 0$, so folgt des weiteren, wie wir hier nicht besonders ausführen:

„Im Falle $D \neq 0$ ist unsere Linienfläche eine nicht zerfallende Linienfläche zweiten Grades.“

Dieser Satz appelliert freilich gleich an eine ge-

wisse geometrische Kenntniss. Eine jede Fläche 2^{ten} Grades ist, algebraisch zu reden, eine Linienfläche der hier in Betracht kommenden Art. Aber es gibt nur 2 Flächen 2^{ten} Grades, welche reelle gerade Linien enthalten. Es sind dies: das einschalige Hyperboloid und das hyperbolische Paraboloid. Betrachten wir z. B. genauer das einschalige Hyperboloid. Es ist aus den Elementen der analytischen Geometrie bekannt, dass dasselbe zwei Schaaren von geraden Linien *) trägt; eine jede gerade Linie der einen Schaar wird von allen Geraden der zweiten Schaar geschnitten und umgekehrt. Wir erkennen daher:

Fig. 2.



In der That trägt eine Fläche 2^{ten} Grades (einschaliges Hyperboloid) 2 Schaaren geradliniger Erzeugenden, und, wenn wir die Linien der einen Schaar als festgegebene Leitlinien betrachten, so können wir die Linien der anderen Schaar definieren als diejenigen Geraden, des Raumes, welche den sämtlichen festen Leitlinien begegnen
[also gemeinsame Transversalen der

*) In der Figur stellen sich die beiden Schaaren der geraden Linien dar als Tangenten (Asymptoten) der äußeren hyp. Begrenzung.

sämtlichen festen Leitlinien sind] .

Hiernach haben 3 lineare Complexe, deren Determinante nicht verschwindet, die eine Erzeugende eines einschaligen Hyperboloids bezw. einer Fläche zweiten Grades gemein. "

Näheren stellt sich die Sache so, daß jedesmal ein Hyperboloid resp. hyperbolisches Paraboloid herauskommt, wenn die 3 geg. Complexe reell sind. sind sie aber imaginär (haben sie imaginäre Coefficienten), so kann jede eigentliche Fläche 2. Grades resultieren.

Jetzt wollen wir nachträglich von der linearen Congruenz noch einiges berichten. Wir haben gesehen, daß die Schaar der linearen Congruenzen:

$\lambda^2 A_{11} + 2\lambda\mu A_{12} + \mu^2 A_{22} = 0$, so lange $\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ ist, 2 Leitlinien besitzt. Wir können $\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ ist, diese Leitlinien aber imaginär sein. Wie ist nun eine solche lineare Congruenz mit 2 konjugiert imaginären Leitlinien gestaltet? (Wir stellen diese Frage besonders deswegen, weil wir in diesem Semester uns viel mit imaginären Linien zu beschäftigen haben werden). Wir wollen auf diese Frage eine Antwort geben ohne weiteren Beweis. Fassen wir einmal eine ganze Schaar von einschaligen Rotationshyperboloiden ins Auge. Dieselbe werde dargestellt durch die

Gleichung: $\frac{x^2 + y^2}{\xi^2} = z^2 + c^2$, wo c eine gegebene Constante, ξ ein veränderlicher Parameter ist. *) Wir wollen uns die Meridiane dieser Rotationsfläche, die man erhält, wenn man $y = 0$ setzt, zeichnen. Die Nebenaxe der Meridianhyperbel ist hiernach gegeben durch $\pm c$, die Hauptaxe dagegen durch $\pm \xi c$, wo ξ beliebig ist. Bestimmt man die Punkte, deren x - und z -Coordinaten $\pm c$ und $\pm \xi c$ sind, so geben diese die Richtungen der beiden Asymptoten an nach einer bekannten Construction. (v. Fig. 3). Wir erhalten so eine ganze Schaar von Hyperbeln, die wir nur um die gemeinsame z -Axe zu drehen brauchen, um die Rotationshyperboloide unserer Gleichung zu erhalten. (Diese Hyperboloide sind für kleines ξ schmal und langgestreckt, mit wachsendem ξ werden dieselben breiter, zugleich aber auch flacher). Jedes dieser Hyperboloide trägt nur ein System von Erzeugenden der einen und der anderen Art. Betrachten wir die Erzeugenden etwa als Tangenten von Schraubenlinien, deren Axe die z -Axe ist, so können wir die beiden Arten als die der rechtsgewundenen und die der linksgewundenen unterscheiden, ganz analog wie man die Schraubenlinien unterscheidet.

*) Es sind dies Rotationshyperboloide, weil wir für $z = 0$ die Gleichung eines Kreises erhalten.

Durch jeden Punkt des Raumes geht nun, wenn wir uns für die eine oder die andere Schaar Erzeugender entscheiden, nur eine derselben hindurch, da ja auch nur ein Hyperboloid den Punkt enthält. Wir werden dann sagen:

„Eine lineare Congruenz mit 2 konjugiert imaginären Leitlinien erhält man beispielsweise, wenn man ein System einschaliger konaxialer Rotationshyperboloide betrachtet, welche eine feste Nebenaxe c haben, und nun auf diesen Hyperboloiden die sämtlichen Erzeugenden erster oder zweiter Art in's Auge faßt, d. h. die sämtlichen Erzeugenden, welche gegen die Rotationsaxe rechts herum oder links herum orientiert sind.“

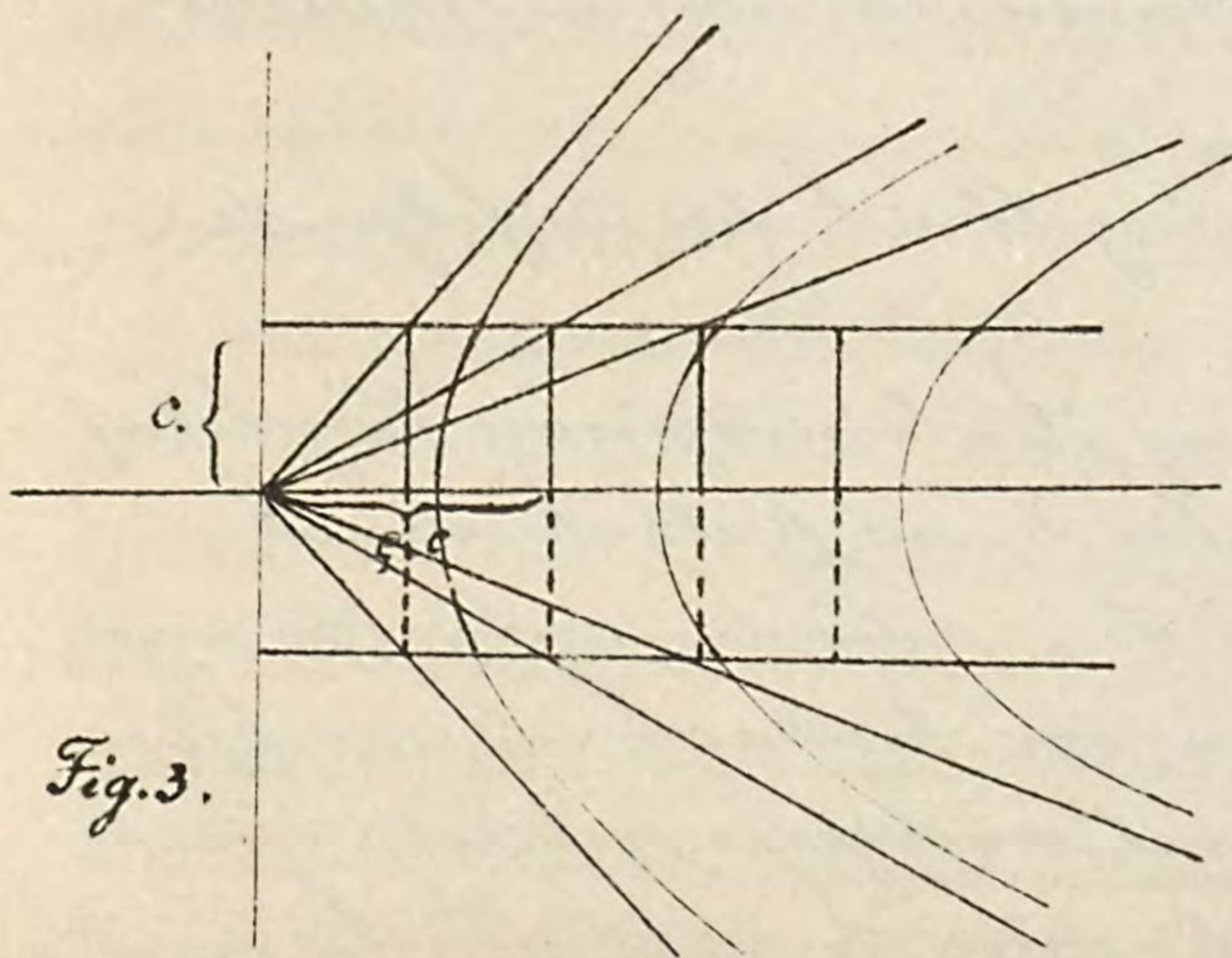


Fig. 3.

Wir kommen so zur Unterscheidung von rechts und links gewundenen Congruenzen.

Schon bei dem einzelnen Hyperboloid sind die aufeinander folgenden Erzeugenden der einen Art

als gegeneinander rechts herum gewunden, die auf

einander folgenden Erzeugenden der anderen Art
als links herum gewundene zu bezeichnen.

Dies werden wir nun auf lineare Congruenzen übertragen:

So werden wir überhaupt die linearen Congruenzen mit imaginären Leitlinien einteilen müssen in rechts gewundene und in links gewundene Congruenzen."

Sind nämlich überhaupt einmal irgend 2 aufeinander folgende Linien einer solchen Congruenz rechts gegen einander gewunden, so werden es je 2 sein, weil ein Uebergang zu links gewundenen Linien nur durch schneidende Linien hindurch erfolgen könnte, keine 2 Linien einer linearen Congruenz mit imaginären Leitlinien sich aber im Reellen schneiden.

Analytisch aber spiegelt sich dies in folgendem ab:

Wenn unsere Gleichung $A = 0$ imaginäre Wurzeln hat, dann ist für alle reellen λ und μ der Ausdruck $\lambda^2 A_{11} + 2\lambda\mu A_{12} + \mu^2 A_{22}$ entweder positiv oder negativ, nie $= 0$. Wir sagen, der Ausdruck ist eine definite quadratische Form, und zwar entweder eine positive oder eine negativ definite quadratische Form.

Die Behauptung ist nun diese:

Die Unterscheidung rechts herum und links herum gewundener Congruenzen geht mit der anderen Unterscheidung parallel, ob unsere quadratische binäre Form:

$\lambda^2 A_{11} + 2\lambda u A_{12} + u^2 A_{22}$, die jedenfalls definit ist, eine positiv oder eine negativ definite Form ist."

Im einzelnen wäre nun die Frage, ob die rechts gewundenen Congruenzen einer positiv definiten oder einer negativ definiten Form entsprechen. Es kommt dies nun ganz auf die gewählte Reihenfolge der Coordinaten an; *) wir schneiden diese Unentschiedenheit ab mit den Worten:

"Wir wollen hinfort annehmen, unser Coordinatensystem sei so gewählt worden, daß den positiv definiten Formen rechtsgewundene, den negativ definiten Formen links gewundene Congruenzen entsprechen."

Wir können diese Verhältnisse hier natürlich nur ohne Beweis anführen. Wir bemerken noch, daß über unendlich nahe laufende Strahlen eine besondere Dissertation geschrieben ist von:

Königs, sur les propriétés infinitésimales de l'espace réglé."

*) Wir können zweierlei Coordinatentetraeder unterscheiden, je nachdem die Reihenfolge 1, 2, 3, 4 der Coordinatenpunkte eine rechts herum oder links herum geordnete Folge bilden!

Dieselbe findet sich abgedruckt in den *Annales de l'école normale supérieure*. 1882.

Wir gehen nun zu der Frage der imaginären Raum-
elemente über, indem wir uns darüber klar werden,
was wir unter einem imaginären Punkt, einer ima-
ginären Ebene oder geraden Linie zu denken haben.

Sprechen wir zunächst vom imaginären Punkt.

Die Verhältnisse sind hier ganz analog denen, wie
wir sie für den imaginären Punkt in der Ebene
kennen gelernt haben. Die Coordinaten
 $x_a = y_a + i z_a$ setzen sich je zusammen aus einem
reellen und einem imaginären Theil, die wir für sich
als Coordinaten zweier Punkte y und z deuten wer-
den. Der Punkt x liegt dann auf der Verbindungs-
linie derselben, auf derselben Linie liegt auch der
Punkt:

$$\bar{x}_a = y_a - i z_a.$$

Dies giebt uns den Satz (vgl. den analogen Satz
für die Ebene):

„Jeder imaginäre Punkt liegt mit seinem konju-
giert imaginären zusammen auf einer bestimmten
reellen geraden Linie des Raumes.“

Wir können in Folge dessen ohne Weiteres sagen,
wie man nach v. Staudt diese imaginären Punkte
reell deuten kann. Man sagt: es giebt eine Involution

zweiter Art auf der Verbindungsgeraden, welche diese beiden Punkte zu Doppelpunkten hat, so daß wir die beiden Punkte geradezu so denken können:

Eine reelle gerade Linie und auf ihnen eine elliptische Involution. Auch wie die beiden so definierten Punkte von einander zu unterscheiden sind, ist im vorigen Semester eingehend erläutert: es geschieht, indem man der reellen geraden Linie, welche die elliptische Involution trägt, noch einen Pfeil beisetzt, um den einzelnen Punkt zu bezeichnen.

Was nun imaginäre Ebenen $u_a = v_a + i w_a$ angeht, so sind die Verhältnisse hier den eben besprochenen natürlich ganz analog. Eine imaginäre Ebene $u_a = v_a + i w_a$ enthält eine reelle Linie, durch welche auch die konjugiert imaginäre Ebene hindurchgeht, und die reelle Linie trägt ein Ebenenbüschel, in dem wir eine elliptische Involution und einen Sinn zur Bezeichnung und Unterscheidung konjugiert imaginärer Ebenen festlegen werden.

Wir werden uns nun den imaginären Linien im Raume zuzuwenden haben. Nehmen wir einmal einen reellen Punkt im Raume an und fragen uns, wie viel imaginäre Linien durch denselben hindurchgehen. Offenbar wird in jeder reellen Ebene, die jenen ausgewählten Punkt enthält,

eine zweifach unendliche Mannigfaltigkeit solcher imaginärer Geraden liegen; also, da ∞^2 reelle Ebenen durch jenen Punkt gehen, wird eine vierfach unendliche Mannigfaltigkeit imaginärer gerader Linien existieren, die jenen Punkt als Träger haben. Da wir ferner dem reellen Punkt dreifach unendlich viele Lagen im Raume geben können, so haben wir den Satz:

„Wir finden im Raume ∞^7 komplexe gerade Linien, welche einem reellen Strahlenbüschel angehören, also ihre konjugierte Gerade schneiden und mit ihr den Mittelpunkt und die Ebene des Strahlenbüschels gemein haben.“

Damit haben wir aber unmöglich die Gesamtheit aller imaginären geraden Linien des Raumes erschöpft. Denn eine gerade Linie hängt von 4 Constanten ab, die, da sie je in einen reellen und imaginären Bestandtheil gespalten werden können, auf ∞^8 imaginäre gerade Linien schließen lassen.

Wir haben also erst ∞^7 hier nachgewiesen.

„Auf Grund dieser Abzählung zerfallen die imaginären geraden Linien daher in 2 Arten, in die specielle Art, die wir bereits erwähnten, welche einen reellen Punkt und eine reelle Ebene besitzt und in die allgemeine Art, bei der dies nicht der Fall ist, — oder indem wir den Gegensatz anders fassen —

in die specielle Art gerader Linien, die ihre konjugiert imaginären Geraden schneiden und in solche, welche es nicht thun: "

Denn es ist klar, daß, wenn zwei konjugiert imaginäre Gerade sich schneiden, der Schnittpunkt, wie die beide verbindende Ebene, nur reell sein kann.

Für die beiden so unterschiedenen Arten imaginärer Linien giebt es keinen allgemein gebräuchlichen Terminus technicus; wir wollen sie fernerhin als die nieder-imaginären und die hoch-imaginären scheiden, indem wir etwa daran denken, daß die imaginären Geraden mit einem reellen Punkt unfasslicher erscheinen als die anderen.

Wir wollen nun diese zumeist auf Analogieschlüsse aufgebauten Betrachtungen analytisch bestätigen.

Es seien die Coordinaten einer imaginären Linie gegeben durch $p_{\alpha\beta} = r_{\alpha\beta} + i s_{\alpha\beta}$.

Wir wollen nun für folgende Ausdrücke, die wir fortgesetzt gebrauchen werden, die hinzugefügten Abkürzungen einführen. Wir setzen:

$$r_{12} r_{34} + r_{13} r_{42} + r_{14} r_{23} = (r, r).$$

$$s_{12} s_{34} + s_{13} s_{42} + s_{14} s_{23} = (s, s).$$

$$r_{12} s_{34} + r_{34} s_{12} + r_{13} s_{42} + r_{42} s_{13} + r_{14} s_{23} + r_{23} s_{14} =$$

$$2(r, s) = 2(s, r).$$

Die Bedingungsgleichung, welche ausdrückt, daß unsere Coordinaten $p_{\alpha\beta}$ wirklich einer geraden Linie angehören, lautet dann:

$$(p, p) = 0 = (r + is, r + is)$$

oder, wenn wir diesen Ausdruck nach dem Reellen und Imaginären entwickeln:

$$(r, r) - (s, s) + 2i(r, s) = 0.$$

Diese Gleichung spaltet sich in die beiden Bedingungen:

$$(r, r) - (s, s) = 0$$

$$(r, s) = 0.$$

Sollen also die Größen $p_{\alpha\beta} = r_{\alpha\beta} + is_{\alpha\beta}$ eine gerade Linie bedeuten, so muß $(r, r) - (s, s) = 0$ und $(r, s) = 0$ sein.

Fragen wir uns nun weiter, wann die so bestimmte gerade Linie $p_{\alpha\beta}$ denn ihre conjugiert imaginäre Gerade $r_{\alpha\beta} - is_{\alpha\beta}$ schneidet? Dazu muß gemäß früherer Auseinandersetzungen:

$$(r + is, r - is) = 0 \text{ sein.}$$

Dies giebt, wenn wir den Ausdruck links entwickeln, die Bedingung:

$$(r, r) + (s, s) = 0.$$

Aus ihr und $(r, r) - (s, s) = 0$ folgt alsdann:

$(r, r) - (s, s) = 0$ als Bedingung für das Schneiden zweier conjugiert imaginären Geraden. Wir können daher als analytisches Kriterium aufstellen:

„Die erste Art, die der nieder-imaginären Geraden, ist dadurch charakterisiert, daß $(r, r') = (s, s') = 0$ ist, was aber keineswegs nöthig ist. Vielmehr sind bei den hoch-imaginären Geraden diese Ausdrücke $(r, r') = (s, s') \neq 0$, d. h. von Null verschieden.“

Hieraus resultiert des ferneren eine weitere Einteilung der imaginären geraden Linien zweiter Art in solche, für die $(r, r') = (s, s') > 0$ und in solche, für die $(r, r') = (s, s') < 0$ ist. Worauf die Unterscheidung hinzielt, werden wir gleich sehen.

Wir wollen vorab allgemein auf diejenigen reellen Geraden unser Augenmerk richten, welche unsere imaginären Linien $(r + is)$ schneiden.

Es sei p die reelle bewegliche Gerade, dann muß sein:

$$(r + is, p) = 0 \text{ oder entwickelt:}$$

$$(rp) + i(sp) = 0.$$

Soll nun p eine reelle Gerade sein, so muß eingeln:

$$(rp) = 0 \text{ und}$$

$$(sp) = 0 \text{ sein.}$$

Auf dieselben Gleichungen kommen wir natürlich auch, wenn wir von der konjugiert imaginären Geraden $r - is$ ausgegangen wären. Wir haben so den Satz:

„Alle reellen Geraden, die eine von 2 konjugiert imaginären geraden Linien schneiden, schneiden auch die

andere der beiden, und genügen dabei den beiden reellen Gleichungen:

$$(r, p) = 0 \text{ und } (s, p) = 0.$$

Diese Gleichungen definieren aber 2 lineare Complexe oder eine lineare Congruenz über die wir letzthin ausführlich gesprochen haben. Wollen wir die Eintheilung der linearen Congruenzen, wie wir sie in letzter Vorlesung gegeben haben, hier anwenden, so werden wir zu setzen haben:

$$(r, r) = A_{11}, (r, s) = A_{12}, (s, s) = A_{22}.$$

Es ist dann in unserem Falle:

$$A_{12} = 0, A_{11} = A_{22}.$$

Nun werden wir imaginäre Gerade $r_{\pm}$ in erster und zweiter Art unterscheiden.

1. Im ersten Falle ist außerdem:

$A_{11} - A_{22} = 0$. Diese Gleichungen führen aber auf eine zerfallende Congruenz. Wir haben daher das Resultat, welches allerdings ganz selbstverständlich ist, sofern man nur darüber nachdenkt:

„Die reellen geraden Linien, welche 2 konjugiert imaginäre gerade Linien der ersten Art schneiden, bilden eine zerfallende Congruenz.“

[Strahlenbündel und Geradenfeld].

2. Im zweiten Falle ist aber: $A_{11} = A_{22} \neq 0$.

Da dann sicher stets $A_{12}^2 - A_{11} A_{22} < 0$ ist, so

bekommen wir nie den Fall, wo die zwei Direktrizen unendlich nahe gerückt sind, vielmehr ergibt sich das Resultat:

„Sind die beiden geraden Linien $r_{\pm is}$ von der zweiten Art, so haben wir eine allgemeine lineare Congruenz mit 2 getrennten Leitlinien, nämlich unseren imaginären Geraden $r_{\pm is}$.“

Diese allgemeine lineare Congruenz mit imaginären Leitlinien haben wir aber gerade ausführlicher betrachtet (vgl. pag. 36). In Rücksicht auf die Ausführung, gewissermaßen werden wir jetzt leicht zwischen den imaginären Geraden zweiter Art, für die $(r, r) = (s, s) > 0$ und für die $(r, r) = (s, s) < 0$ ist, scheiden können.

Die beiden Unterarten $(r, r) = (s, s) \geq 0$ sind nämlich dadurch zu unterscheiden, daß das eine Mal die reellen Transversalen von $r_{\pm is}$ eine rechts gewundene

Congruenz bilden, das andere Mal eine links gewundene Congruenz, und zwar ist im ersten Falle $(r, r) = (s, s) > 0$, im zweiten $(r, r) = (s, s) < 0$, (gemäß unserer Vereinbarung über die Reihenfolge der Coordinaten).

„Dementsprechend wollen wir die imaginären geraden Linien $(r, r) = (s, s) > 0$ selbst als links gewundene gerade Linien bezeichnen und $(r, r) = (s, s) < 0$ selbst als rechts gewundene,“ (entsprechend dem Fall, daß die Leitlinien

der rechts gewundenen Schaar von Erzeugenden eines einschaligen Hyperboloids selbst links gewunden sind und umgekehrt).

Wir wollen hier noch ausdrücklich betonen, daß, wenn r_+ eine rechts gewundene imaginäre gerade Linie ist, nicht r_- links gewunden ist, sondern vielmehr: bleibt beim Wechsel von $+i$ und $-i$ diese Unterscheidung der hoch-imaginären Geraden in 2 Unterarten un-
geändert erhalten.

Wir wollen nun noch eine historische Bemerkung hinzufügen. v. Staudt hat sich in seiner „Geometrie der Lage“ die Aufgabe gestellt, auch für die imaginären Geraden im Raume eine reelle Interpretation zu finden.*)

„Was die imaginären Geraden erster Art angeht, so interpretiert v. Staudt dieselben selbstverständlich durch ein reelles Strahlbüschel, auf welchem eine elliptische Involution und ein Sinn (ein Pfeil) gegeben ist.“

„Um nun auch die imaginären Geraden der zweiten Art zu versinnlichen, denkt sich v. Staudt die Con-
gruenz der reellen Transversalen konstruiert, und des
weiteren auf jeder einzelnen dieser Transversalen die el-
liptische Involution, die zu den beiden Schnittpunkten
mit $r_{\pm}$ zugehört und endlich den Sinn, der zu
dem einen dieser beiden Schnittpunkte hinweist.“

*) v. Staudt ist wohl überhaupt der Erste, der die imaginären Raumgeraden systematisch in Betracht gezogen hat!

Hiermit wollen wir unsere Betrachtungen imaginärer Geraden und zugleich das Capitel, welches von den Punkten, Ebenen und geraden Linien des Raumes handeln sollte, beenden.

Wir behandeln in einem:
zweiten Kapitel:

Die Flächen zweiten Grades.

Diese Betrachtungen werden sich etwas ausgiebig gestalten, da wir von den Flächen zweiten Grades, sehr genau Bescheid wissen müssen, um die Cayley'sche Maassbestimmung des Raumes späterhin voll und ganz zu verstehen.

Wir stellen an die Spitze die Gleichungen:

$$1.) \sum a_{\alpha\beta} x_{\alpha} x_{\beta} = 0, \quad 2.) \sum a_{ab} u_a u_b = 0,$$

von denen die erste die Fläche 2^{ter} Ordnung (in Punktkoordinaten), die zweite die Fläche zweiter Klasse (in Ebenenkoordinaten) darstellt. Wir werden weiterhin die Gleichung 1. bevorzugen, doch zunächst beide Gleichungen betrachten.

Wir werden zunächst die Gesichtspunkte in's Auge fassen, die wir als zur algebraischen Theorie der Flächen 2. Grades

gehörend anzusehen haben. Das Wort „algebraisch“ soll ausdrücken, daß wir zunächst gleichgültig sein werden gegen den Unterschied von Reellen und Imaginären, der uns erst später interessieren wird: wir dürfen uns in dem zunächst Folgenden die Coefficienten a, a unserer Gleichungen selber als complex denken, während sie später als selbstverständlich reell angesehen werden sollen.

Das erste, was wir uns in Bezug auf unsere Flächen zweiten Grades entwerfen, ist eine Theorie der Polarverwandtschaft. Wir ordnen jedem Punkte x eine Polarebene zu in Bezug auf die Fläche 2^{ter} Ordnung, und jeder Ebene u einen Pol in Bezug auf die Fläche 2^{ter} Klasse. Die Polarverwandtschaft ist gegeben, durch:

$$\S u_a = \sum_{\beta} a_{a\beta} x_{\beta} \text{ und}$$

$\S x_a = \sum_{\beta} a_{ab} u_{\beta}$, wo u_a resp. x_a die Polarebene resp. der Pol zu dem gegebenen Punkte x_{β} resp. der gegebenen Ebene u_{β} ist. Alles das ist nach den früheren Entwicklungen über ebene Curven 2^{ten} Grades selbstverständlich.

Nun werden wir entsprechend dieser Polarverwandtschaft die Flächen 2^{ten} Grades einteilen u. zwar nach der Art der Determinanten aus den $a_{\beta\beta}$ resp. a_{ab} . Wir setzen also:

$$D = |a_{\beta\beta}|; \quad \Delta = |a_{ab}|.$$

Wir haben dann, was die Ordnungsflächen angeht, folgende Fälle zu unterscheiden:

- 1., $D \geq 0$ Allgemeine Fläche zweiter Ordnung.
- 2., $D = 0$, jedoch sollen nicht sämtliche ersten Unterdeterminanten $D_{\alpha\beta} = 0$ sein. Kegel.
- 3., Alle $D_{\alpha\beta} = 0$, aber nicht alle Unterdeterminanten zweiter Ordnung $D_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$ Ebenenpaar.
- 4., Alle $D_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$, aber nicht alle dritten Unterdeterminanten, d. h. nicht sämtliche Elemente $a_{\alpha\beta} = 0$ Doppelsebene.
- 5., Alle $a_{\alpha\beta} = 0$ Gesamtraum oder Identität.

Entsprechend gliedern sich die Klassenflächen in:

- 1., $\Delta \geq 0$ Allgemeine Fläche zweiter Klasse.
- 2., $\Delta = 0$, jedoch nicht alle $\Delta_{ab} = 0$ Curve 2. Klasse.*).
- 3., $\Delta_{ab} = 0$, nicht alle $\Delta_{abcd} = 0$ Punktpaar.
- 4., Alle $\Delta_{abcd} = 0$, nicht alle $\alpha_{ab} = 0$ Doppelpunkt.
- 5., alle $\alpha_{ab} = 0$ Identität.

Wir erinnern nun, wie wir im vorigen Semester für die Curven zweiter Klasse die entsprechende Ordnungsgleichung und für die Curve zweiter Ordnung die Klassengleichung aufgestellt hatten. Die analoge Aufgabe wollen wir für die Flächen zweiten Grades behandeln und uns fragen, wie bilden wir die Klassenglei.

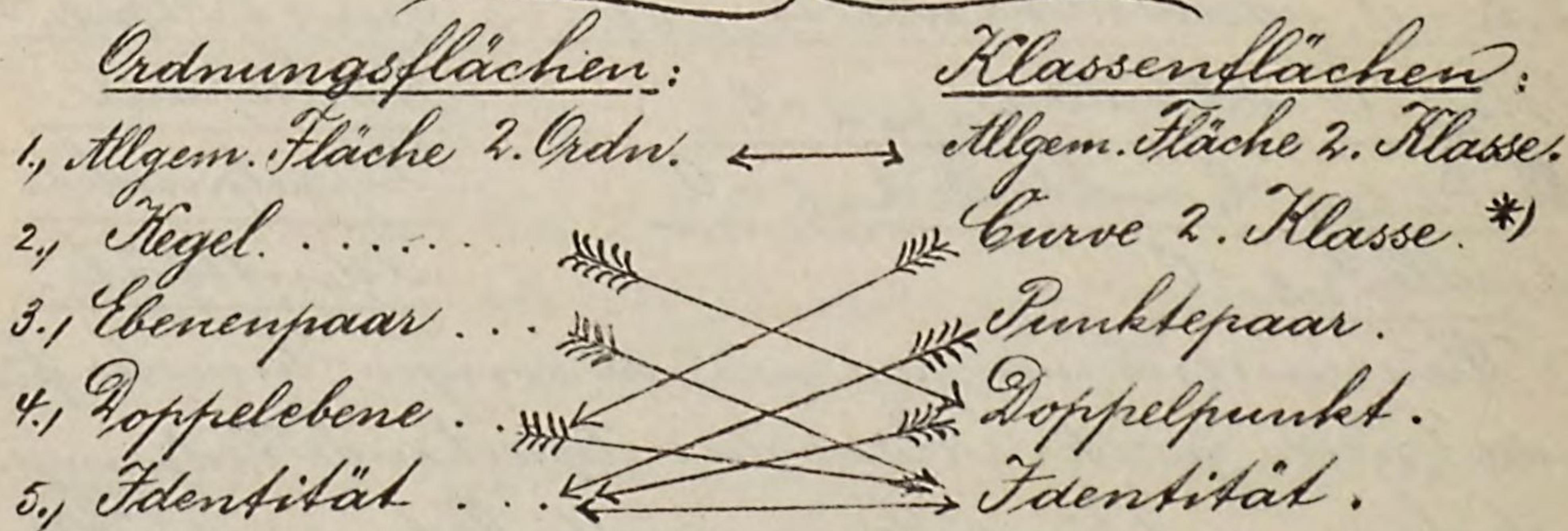
*) d. h. sämtliche Tangentialebenen, die eine Curve 2. Klasse berühren. Entsprechendes gilt für 3. und 4.

chung einer Fläche zweiten Grades aus ihrer Ordnungsgleichung und umgekehrt?

Es ergibt sich hier für die Verwandlung der Ordnungsflächen folgendes Resultat:

Die allgemeine Fläche zweiter Ordnung geht in die allgemeine Fläche zweiter Klasse über, der Kegel verwandelt sich in einen Doppelpunkt, nämlich die doppelt zählende Spitze des Kegels, das Ebenenpaar dagegen, sowie die Doppelebene und natürlich die Identität selber führen, in Klassengleichungen ausgedrückt, zur Identität.

Analoges gilt für die Verwandlung der Klassengleichungen in Ordnungsflächen, wie folgendes Schema zusammenstellend zeigen möge:



Diese Verhältnisse haben wir nun durch analytische Rechnung zu stützen.

*) Die Curve 2. Klasse z. B. liefert in Punktscoordinaten dargestellt eine Doppelebene, nämlich die doppelt gezählte Ebene der Curve selbst.

Um die Gleichung einer Fläche, die in Punktcoordi-
naten $\sum a_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta = 0$ gegeben ist, in Ebenencoordina-
ten darzustellen, machen wir einen ganz analogen
Ansatz wie in der entspr. Aufgabe der Geometrie in
der Ebene.

Es ist, wie wir sahen:

1., $\sum_3 a_{\alpha\beta} x_\beta - \xi u_\alpha = 0$, wo unter u_α die Ebene zu ver-
stehen ist, die zu einem gegebenen Punkte x in Be-
zug auf die Ordnungsfäche polar ist. Liegt jetzt der
Punkt x auf der Fläche, so geht die Polarebene durch
ihn hindurch, - denn dieselbe wird die Tangential-
ebene in diesem Punkte an die Fläche - es ist also:

2., $\sum u_\beta x_\beta = 0$. Die 4 Gleichungen 1., und die Glei-
chung 2., zusammen definieren alsdann eine Tan-
gentialebene u_α . Wenn wir daher aus diesen Glei-
chungen die x_β und ξ eliminieren, so werden wir
die Bedingung bekommen, unter welcher u_α Tan-
gentialebene unserer Fläche ist. Dieselbe lautet:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & u_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & u_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Diese 5 gliedrige Determinante, gleich 0 gesetzt, giebt

alsdann die verlangte Klassengleichung für unsere gegebene Ordnungsfläche. Wir können dieselbe, indem wir nach den $u_a u_b$ entwickeln, auch darstellen durch:

$\sum D_{ab} u_a u_b = 0$, d. h. mit dem Produkt $u_a u_b$ ist gerade die erste Unterdeterminante D_{ab} multipliziert.

Nun für die Fälle 3, 4, 5 der Ordnungsflächen, (pag. 50) sämtliche $D_{ab} = 0$ sind, so haben wir als Resultat unserer Rechnung jedenfalls dies:

Indem die Gleichung einer Ordnungsfläche in Ebenencoordinaten $\sum D_{ab} u_a u_b = 0$ wird, ergibt sich ohne weiteres, daß in der That ein Ebenenpaar, eine Doppelsebene oder eine identisch verschwindende Gleichung 2^{ter} Ordnung eine identisch verschwindende Klassengleichung ergibt.

Wir fahren fort, indem wir so sagen:

„Die volle Begründung unseres Schemas ergibt sich nun, wenn wir die Sätze über adjungierte Determinanten in Betracht ziehen, d. h. die Sätze über diejenigen Determinanten, die sich aus den Unterdeterminanten D_{ab} der a_{ab} als Elementen bilden lassen.“

Natürlich können wir in dieser ganzen Entwicklung die x, a, D beziehungsweise durch die u, a, Δ ersetzen.

Dies alles wollen wir jetzt nun im einzelnen nicht weiter verfolgen; wir beziehen uns auf die Vorlesung des Wintersemesters, in der wir die analogen Betrachtungen angestellt haben. In der That haben wir diese Einzelheiten weiterhin auch kaum nöthig.

Weiterhin nämlich beschäftigen wir uns fast ausschließlich mit allgemeinen Flächen zweiter Ordnung oder Klasse, bei denen ebensowohl jedem Punkte eine bestimmte Polarebene, wie andererseits jeder Ebene ein bestimmter Pol zugeordnet ist."

Wenn also im Folgenden nicht ausdrücklich das Gegentheil gesagt ist, werden wir immer annehmen, daß eine allgemeine F_2 gegeben sei.

Wir wollen jetzt einen Punkt x annehmen, dem wir eine Polarebene u zuordnen durch die Gleichung:
 $\S u_\alpha = \sum_\beta a_{\alpha\beta} \cdot x_\beta$, und einen zweiten Punkt y , dem wir die Polarebene v zuordnen durch:

$$\S v_\alpha = \sum_\beta a_{\alpha\beta} \cdot y_\beta. \text{ Dann ist offenbar:}$$

$$\S (u_\alpha + \lambda v_\alpha) = \sum_\beta a_{\alpha\beta} (x_\beta + \lambda y_\beta).$$

Die Punkte $x_\alpha + \lambda y_\alpha$ sind nun, wie wir wissen, Punkte auf der Verbindungslinie von x_α und y_α , während die Ebenen $u_\alpha + \lambda v_\alpha$ dem Ebenenbüschel angehören, dessen Träger die Schnittgerade der Ebenen u_α und v_α ist.
 Wir haben so den Satz:

„Rückt der Pol auf einer geraden Linie fort, so dreht sich die zugehörige Polarebene um eine zweite gerade Linie.“

„Man nennt solche 2 gerade Linien im Raume reciproke Polaren, weil umgekehrt, wenn der Pol auf der zweiten geraden Linie sich bewegt, die Polarebene sich um die erste gerade Linie dreht.“

Wie werden wir die letzte Behauptung nun beweisen? Drücken wir zunächst überhaupt einmal aus, daß zwei Punkte x und y so liegen, daß der eine Punkt z. B. x auf der Polarebene des anderen y liegt.

Da die Coordinaten der Polarebene von y gegeben sind, durch $\sum v_\alpha - \sum a_{\alpha\beta} y_\beta$, so ist die Gleichung derselben:

$$\sum v_\alpha x_\alpha = 0,$$

oder für v_α seinen Werth eingesetzt:

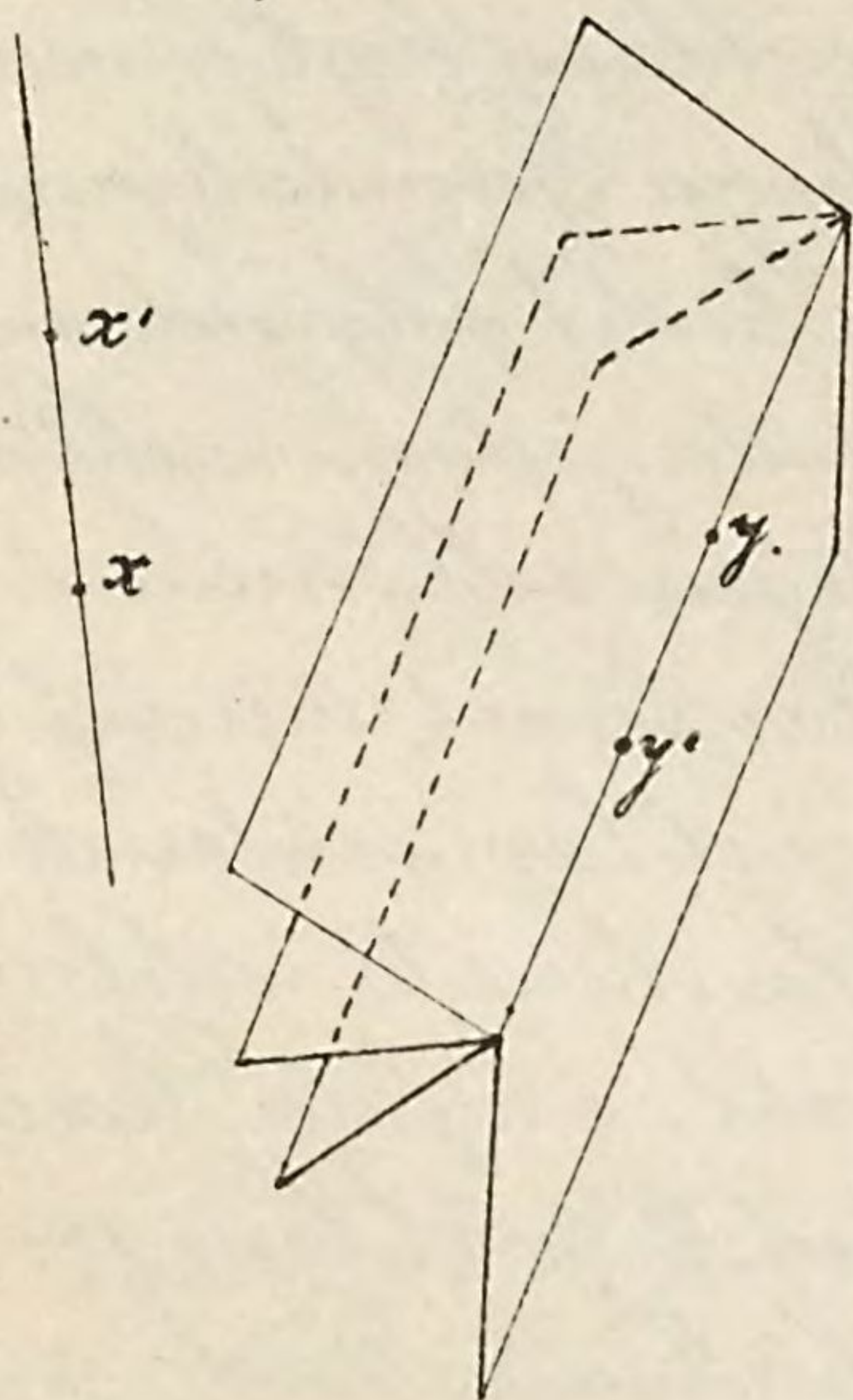
$\sum a_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta = 0$. Diese Gleichung giebt uns dann die Bedingung, der die Coordinaten des Punktes x_α genügen müssen, damit dieser auf der Polarebene von y_α liegt.

Da aber $\sum a_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta = 0$ in Bezug auf x_α und y_β symmetrisch ist (es ist $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$), so giebt diese Gleichung zugleich die Bedingung, der der Punkt y_α genügen muß, um auf der Polarebene von x_α zu liegen. Wir haben so den für die Polarenver.

wandtschaft fundamentalen Satz:

„Liegt y auf der Polarebene von x , so liegt auch x auf der Polarebene von y .“

Fig. 4.



Hieraus ergibt sich aber sofort unsere Behauptung betr. die reciproken Polaren. Ist nämlich die gerade Linie yy' Schnitt der Polarebenen von x und x' , so wird die gerade Linie xx' ebensowohl Schnitt der Polarebenen von yy' sein.

So viel über die algebraische Theorie der Flächen 2^{ten} Grades. Ausführlicher hierauf einzugehen verbietet der Charakter

einer Einleitung.

II. Wir werden in einem zweiten Abschnitt unseres Kapitels jetzt von der Eintheilung der Flächen 2^{ten} Grades in Rücksicht auf die Realitätsunterschiede sprechen. Doch wollen wir uns auf allgemeine Flächen $\sum a_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta = 0$ (mit nicht verschwindender Determinante D) beschränken. Außerdem sollen

die Coefficienten $a_{\alpha\beta}$ reell sein. Wir wollen solche Flächen schlechthin reelle *) Flächen 2^{ten} Grades nennen, ein Unterschied von den imaginären Flächen zweiten Grades, als welche wir die durch Gleichung:

$\Sigma a_{\alpha\beta} x_{\alpha} x_{\beta} = 0$ mit komplexen Coefficienten dargestellten Flächen bezeichnen.

Das Eigenartige unserer Betrachtung liegt fernerhin darin, daß wir ein Polartetraeder zu Grunde legen wollen. Man gewinnt ein solches leicht folgendermaßen: Zu einem beliebigen Punkte 1, der jedoch nicht auf der gegebenen Fläche selbst liegen soll, suchen wir in Bezug auf dieselbe die Polarebene I, darauf zu einem Punkte 2 dieser Ebene, welcher wieder der Fläche nicht angehört, die Polarebene II, welche natürlich durch den Punkt 1 geht. Auf der Durchschnittskante der Ebene I und II wählen wir dann einen wieder außerhalb der Fläche gelegenen Punkt 3, dessen Polarebene III infolge dessen durch die Punkte 1 und 2 geht und die Ebenen I und II in einem Punkte 4 schneidet.

Die Polarebene IV des Punktes 4 endlich ist durch die Ebene der drei Punkte 1, 2, 3 gegeben.

*) wir wollen ausdrücklich bemerken, daß hierdurch keineswegs gesagt ist, daß die Flächen überhaupt nur reelle Punkte enthalten.

Die vier Ebenen bilden alsdann ein Polartetraeder,
dessen charakteristische Eigenschaft hiernach dar-
in besteht, dass jede Seitenfläche Polarebene der
gegenüberliegenden Ecke ist.

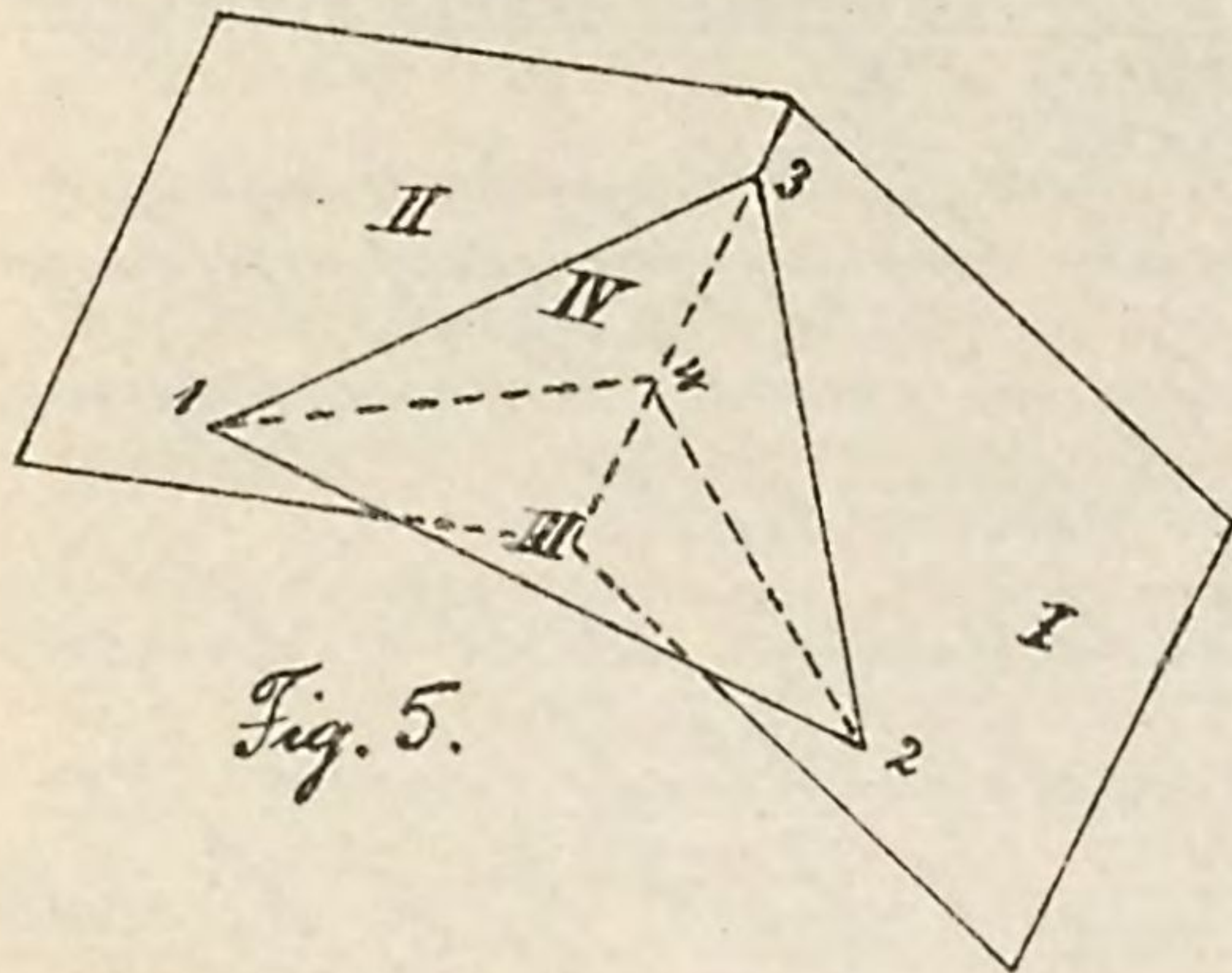


Fig. 5.

Wir wollen einmal
 abzählen, wie viel
 willkürliche Constan-
 te in unserer Kon-
 struktion eines Polar-
 tetraeders enthalten
 sind. Den Punkt 1
 konnten wir ganz be-
 liebig im Raume
 (mit Ausschluss der
 Fläche selbst) wählen,

dies liefert ∞^3 Möglichkeiten, der Punkt 2 war (mit
 einer entsprechenden Beschränkung) beliebig auf
 der Fläche I anzunehmen, was ∞^2 fache Auswahl be-
 dingt, endlich war die Ecke 3 auf der Kante (I, II) in
 ∞ fache verschiedener Weise zu wählen möglich.

Fassen wir dies zusammen, so folgt:

„Es giebt bei einer gegebenen Fläche 2^{ten} Grades ∞^6 zu-
gehörige Polartetraeder.“

Irgend eines dieser Polartetraeder wollen wir nun
 als Coordinatentetraeder zu Grunde legen. Die

Gleichung unserer Fläche nimmt dann (in analoger Weise wie die Gleichung eines ebenen Kegelschnittes bezogen auf ein Polardreieck) die Form an:

$$k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 + k_3 x_3^2 + k_4 x_4^2 = 0, \text{ d. h.}$$

"Auf ein Polartetraeder bezogen enthält die Gleichung einer Fläche 2^{ten} Grades nur noch die Quadrate der Variablen." *)

Wir können sofort noch hinzufügen, indem wir uns erinnern, daß wir nach Voraussetzung mit einer reellen F_2 zu thun haben:

Sofern wir unsere Polartetraeder reell nehmen, wie wir in der Folge ausdrücklich immer voraussetzen werden, so sind die k_1, k_2, k_3, k_4 reelle Größen. Da ferner die Determinante D , die wir als $\neq 0$ vorausgesetzt haben, gleich:

$$\begin{vmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{vmatrix} = k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot k_4 \text{ ist, so folgt.}$$

"Von den 4 Größen k wird dabei keine einzige, sofern es sich um eine allgemeine Fläche zweiten Grades handelt, verschwinden."

*) Der Beweis ist analog zu führen, wie bei dem entspr. Falle der Ebene.

Nun ist die Frage, ob wir nicht durch weitere Ver-
änderung des Coordinatensystems die Größen k
wegschaffen können, so daß wir nur eine numeri-
sche Gleichung vor uns haben?

Wir setzen $\sqrt{k_1} \cdot x_1 = \tilde{x}_1$; $\sqrt{k_2} \cdot x_2 = \tilde{x}_2$; $\sqrt{k_3} \cdot x_3 = \tilde{x}_3$; $\sqrt{k_4} \cdot x_4 = \tilde{x}_4$.

Hierdurch erhalten wir die Form:

$\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2 + \tilde{x}_3^2 + \tilde{x}_4^2 = 0$. Doch sind obige Substitutio-
nen nur dann reell, wenn die k positiv waren,
anderenfalls dagegen imaginär.

Nimmt man daher gegebenenfalls auch imaginäre
Substitutionen in Betracht, so kann man von der
oben erhaltenen Gleichungsform sofort zu der für
alle Fälle geltenden Gleichung übergehen:

$$\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2 + \tilde{x}_3^2 + \tilde{x}_4^2 = 0.$$

Da in dieser Gleichung eine spezifische Constante
nicht mehr vorkommt, so erhalten wir das Resultat:
„Unser letzter Satz zeigt uns, daß irgend 2 allgemeine
Flächen zweiten Grades vom allgemeinen algebrai-
schen Standpunkte aus immer durch lineare Sub-
stitutionen in einander überführt werden können
oder prägnanter ausgedrückt:

„Vom algebraischen Standpunkte aus bilden die
allgemeinen Flächen zweiten Grades nur eine Art.“

Wollen wir uns jedoch nur auf reelle Substitutio-
nen einlassen, so werden wir bei negativen k die

Substitution $\tilde{x} = \sqrt{-k} \cdot x$ zu machen haben. Wir können dies übersichtlich anschreiben, wenn wir etwa $k_a = \pm l_a^2$ setzen.

Dann geht unsere ursprüngliche Gleichung (pag. 61) über in:

$$\pm l_1^2 x_1^2 \pm l_2^2 x_2^2 \pm l_3^2 x_3^2 \pm l_4^2 x_4^2 = 0.$$

Nun setzen wir:

$$l_1 x_1 = \tilde{x}_1; l_2 x_2 = \tilde{x}_2; l_3 x_3 = \tilde{x}_3; l_4 x_4 = \tilde{x}_4.$$

Dies ist sicher eine reelle lineare Substitution *).

Hierdurch geht unsere Gleichung über in:

$$\pm \tilde{x}_1^2 \pm \tilde{x}_2^2 \pm \tilde{x}_3^2 \pm \tilde{x}_4^2 = 0, \text{ d. h. in Worten:}$$

Beschränken wir uns auf reelle lineare Substitutionen, so können wir unsere Gleichung: $k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 + k_3 x_3^2 + k_4 x_4^2 = 0$ nur auf eine der verschiedenen Gleichungstypen $\pm \tilde{x}_1^2 \pm \tilde{x}_2^2 \pm \tilde{x}_3^2 \pm \tilde{x}_4^2 = 0$ bringen und dementsprechend zerfallen, wie nun noch näher auszuführen ist, die allgemeinen Flächen 2^{ten} Grades gegenüber reellen linearen Transformationen in eine bestimmte Anzahl von Unterarten.

Um diese Fälle uns deutlich zu machen, wollen wir die linke Seite unserer Gleichung als solche gesondert betrachten. Es sei also gegeben die

*) Eine einfache Betrachtung der Substitutionen zeigt, daß dieselben das Koordinatensystem unverändert lassen und nur den Einheitspunkt reell transformieren.

quadratische Form von 4 Variablen $\sum a_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta$ mit der Bedingung $D \neq 0$. (allgemeine quaternäre quadratische Form). Von einer solchen quadratischen Form ist es bekannt oder auch: es folgt aus den bislang angestellten Betrachtungen, daß man dieselbe jedenfalls (u. zwar noch auf 2^6 Weisen) durch reelle lineare Transformationen in eine der 5 Typen verwandeln kann:

$$\begin{array}{cccc}
 + x_1^2 & + x_2^2 & + x_3^2 & + x_4^2 \\
 + x_1^2 & + x_2^2 & + x_3^2 & - x_4^2 \\
 + x_1^2 & + x_2^2 & - x_3^2 & - x_4^2 \\
 + x_1^2 & - x_2^2 & - x_3^2 & - x_4^2 \\
 - x_1^2 & - x_2^2 & - x_3^2 & - x_4^2
 \end{array}$$

Nun gilt das sogenannte: „Trägheitsgesetz der quadratischen Formen“, das wir hier nur historisch erwähnen wollen, ohne es näher zu begründen. *)

Dasselbe besagt, daß es nie möglich ist, einen unserer 5 Typen in einen anderen durch reelle lineare Transformation zu verwandeln.

Dies hat dann die sehr klare Folge, daß hiernach jede gegebene quadratische Form in eine bestimmte der 5 gegebenen Typen hineingehört. Die erste Form nennt man eine positiv definite Form, die letzte eine negativ definite Form, und

*) Vergl. übrigens die beiden Vorlesungen: Differentialgleichungen der Physik, II. Sommer 1889. Lamé'sche Funktionen Winter 1889-90.

zwar deswegen, weil die erste für alle reellen Werthe der Z stets positiv, die letzte stets negativ ist.

Die drei mittleren Typen nennt man indefinite Formen; sie können für reelle Werthe der Z jede sowohl positiv wie negativ werden.

Wie stellt sich die Sache nun geometrisch dar?
„Weil geometrisch nicht die Formen selbst, sondern nur die Gleichungen in Betracht kommen, welche durch Nullsetzen der Formen entstehen, so correspondieren, wie leicht zu sehen, den unterschiedenen 5 Typen der Formen dreierlei Gleichungsformen und damit dreierlei Typen von Flächen 2^{ten} Grades.“
 Diese wollen wir nun im Einzelnen betrachten:

1) Es sei:

$\pm Z_1^2 \pm Z_2^2 \pm Z_3^2 \pm Z_4^2 = 0$, wo entweder das obere oder das untere Zeichen für alle Glieder zugleich zu wählen ist.

Dieser Gleichung genügen keine reellen Werthe der Z , außer $Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z_4 = 0$, was hier, wo wir homogene Coordinaten haben, ohne Bedeutung ist. Wir nennen diese Flächen demnach:

nulltheilige Flächen 2^{ten} Grades.

„Dieselben werden also durch eine Gleichung zwischen den Quadraten der Z dargestellt, in der alle Vorzeichen übereinstimmen.“

2) Es sei:

$$\pm Z_1^2 \pm Z_2^2 \pm Z_3^2 \mp Z_4^2 = 0.$$

Wir wollen diese Flächen als ovale Flächen zweiten Grades bezeichnen.

„Dieselben werden durch eine rein quadratische Gleichung der $\bar{z}$ dargestellt, bei welcher ein Vorzeichen von den übrigen abweicht.“

3.) Es sei:

$$\pm \bar{z}_1^2 \pm \bar{z}_2^2 \mp \bar{z}_3^2 \mp \bar{z}_4^2 = 0.$$

Es sind dies die ringförmigen Flächen zweiten Grades.

„Dieselben liegen vor, wenn die + und die - Zeichen in der Gleichung zwischen den $\bar{z}^2$ gleich oft auftreten.“

Wenn wir diese Einteilung nun mit jener der gewöhnlichen analytischen Geometrie vergleichen wollen, dann müssen wir uns vor Augen halten, daß für die letztere neben den allgemeinen projectiven Eigenschaften besonders auch die Beziehung der ∞ fernen Ebene zu der Fläche zweiten Grades maßgebend ist. Wir wollen daraufhin einmal unsere 3 Fälle einzeln betrachten, indem wir zugleich statt der homogenen Variablen gewöhnliche anwenden.

($\bar{z}_4 = 1$ gesetzt).

1.) Im ersten Falle haben wir:

$\bar{z}_1^2 + \bar{z}_2^2 + \bar{z}_3^2 = -1$. Dieser Gleichung kann nicht durch reelle Werthe der k genügt werden, daher nennt die

gewöhnliche Geometrie die durch sie dargestellte Fläche eine imaginäre Fläche 2^{ten} Grades, "eine Bezeichnung, welche in unserem Zusammenhange nicht annehmbar ist, da wir dieselbe bereits in anderer Weise verwandt haben. *) Eine weitere Unterscheidung je nach der Beziehung zur ∞ fernen Ebene tritt hier noch nicht ein.

2.) Was nun die zweite Gleichungsform betrifft, so haben wir folgende drei Flächentypen der gewöhnlichen Geometrie zu nennen, die hierher gehören: (Wir geben ihre Gleichungen in gewöhnlichen rechtwinkligen Coordinaten an!)

a.) das Ellipsoid: **)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

b.) das zweischalige Hyperboloid:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \text{ und}$$

c.) das elliptische Paraboloid:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2z}{c} = 0.$$

*) Wir nennen eben "eine imaginäre F_2 " eine solche, deren Gleichung $\sum a_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta = 0$ imaginäre Coefficienten enthält.

**) Bei den Fällen a und b tritt die Zugehörigkeit zu der zweiten Gleichungsform sofort hervor, da diese Flächen ja bereits auf ein Polartetraeder bezogen sind, was bei c nicht der Fall.

Die nähere Darlegung dieser Gruppierung ist diese:
„Die ovalen Flächen zweiten Grades zerfallen gegenü-
ber der ∞ fernen Ebene in drei Arten; entweder die
Ebene trifft überhaupt nicht die Fläche zweiten Gra-
des, dann haben wir das Ellipsoid, oder sie schneidet
die Fläche zweiten Grades, dann haben wir das zwei-
schalige Hyperboloid, oder endlich sie berührt die
Fläche, dann haben wir das elliptische Paraboloid.“

3.) Zu dem dritten Gleichungstypus gehören:

a.) das einschalige Hyperboloid:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \text{ und}$$

b.) das hyperbolische Paraboloid:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0, \text{ d. h.}$$

Die ringförmigen Flächen liefern je nach ihrer
Stellung zur ∞ fernen Ebene, welche sie entweder in
einem eigentlichen oder in einem zerfallenden
Kegelschnitte schneiden id. est berühren, einschali-
ge Hyperboloide bzw. hyperbolische Paraboloid.“

Wir erkennen jetzt leicht den charakteristischen Unterschied der ovalen und der ringförmigen Flächen zweiten Grades. Auf letzteren laufen, wie bekannt, im Gegensatze zu den ersteren 2 Schaaren reeller Geraden, und in Rücksicht hierauf nennt die gewöhnliche Geometrie die Flächen zweiter Art, reelle nicht geradlinige Flächen, die dritter Art dagegen

„reelle geradlinige Flächen.“ Doch sind diese Benennungen von unserem Standpunkte aus hier nicht beizubehalten. Denn einmal können wir die Bezeichnung „reelle Fläche“ nicht gebrauchen aus demselben Grunde, um desswillen wir bei den Flächen erster Art die Bezeichnung „imaginäre Fläche“ nicht annehmen konnten; dann aber auch ist der Ausdruck „geradlinig resp. nicht geradlinig“ für den hier von uns eingenommenen Standpunkt nicht bezeichnend, weil auf den Flächen 2^{ter} Art ebenso gut wie auf denen dritter Art gerade Linien liegen, nur sind dieselben dort imaginär. Diese Scheidung in geradlinige und nicht geradlinige Flächen geht daher um so weniger an, als wir eben nun darauf ausgehen wollen, in einem dritten Theile unserer Betrachtung der F_2 auf allen unseren Flächen bald reelle bald imaginäre gerade Linien nachzuweisen.

III. Von den geraden Linien auf den reellen Flächen.

Es ist jedenfalls zweckmäßig, mit dem ringförmigen Typus zu beginnen. Wir gehen aus von der Gleichung:

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0, \text{ welche wir umformen in:}$$

$$(x_1^2 - x_3^2) + (x_2^2 - x_4^2) = 0$$

oder

$(x_1 + x_3)(x_1 - x_3) + (x_2 + x_4)(x_2 - x_4) = 0$. Wir führen nun ein neues Coordinatensystem ein durch die einfachen Substitutionen:

$$x_1 + x_3 = y_1, \quad x_2 + x_4 = y_2;$$

$$x_1 - x_3 = y_3, \quad x_2 - x_4 = y_4.$$

Dann lautet unsere Gleichung:

$$y_1 y_3 + y_2 y_4 = 0.$$

Diese Gleichungsform legen wir der weiteren Untersuchung zu Grunde.

Es befriedigt offenbar unsere Gleichung:

$$\begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 0, \end{cases}$$

d. h. die Kante, die die Eckpunkte 3 und 4 unseres Coordinatentetraeders verbindet. Ebenso folgt aus den Gleichungspaaren:

$$\begin{cases} y_1 = 0. \\ y_4 = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} y_2 = 0. \\ y_3 = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} y_3 = 0. \\ y_4 = 0. \end{cases}$$

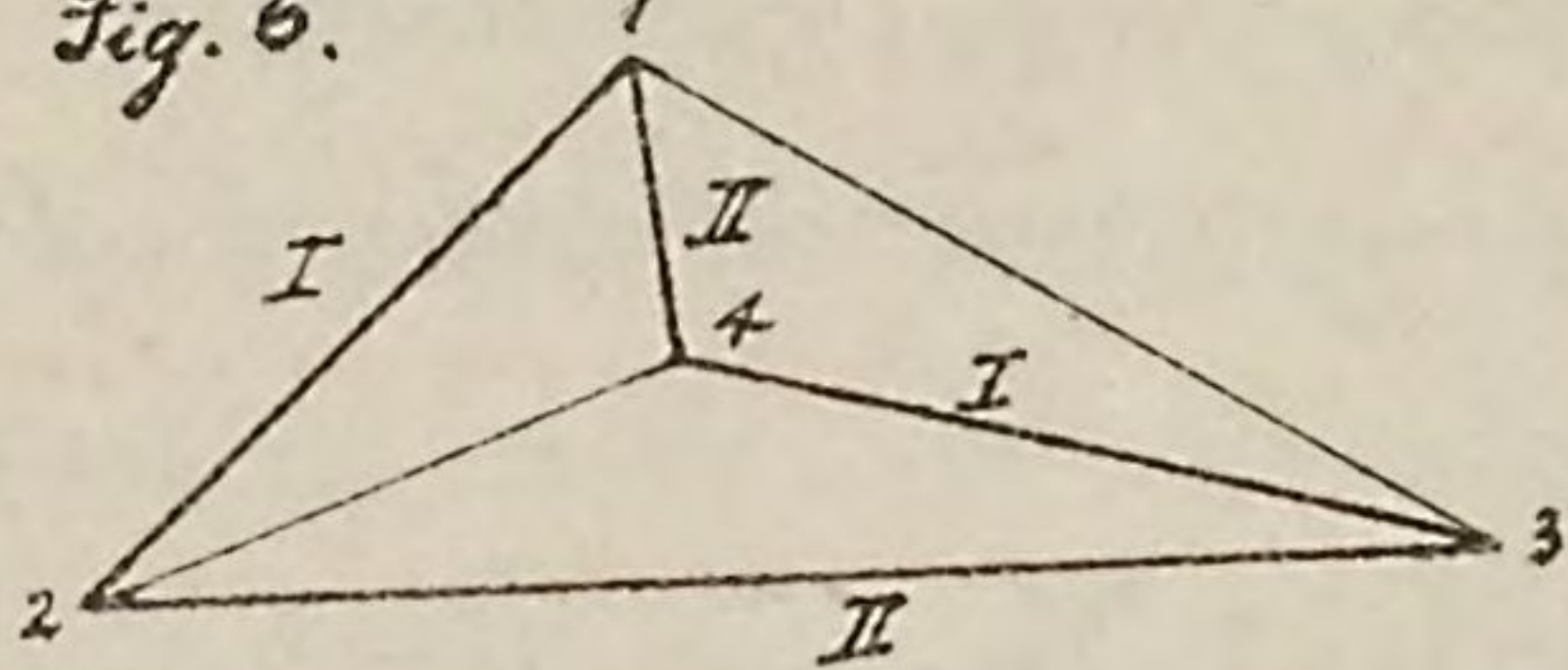
vermöge deren unsere Gleichung auch jedesmal befriedigt ist, daß auch entspr. die Kanten:

(23), (14), (12) in ihrer ganzen Ausdehnung auf der Fläche liegen.

Unsere Tetraeder gehört daher mit 4 seiner

Kanten, die ein windschiefes Viereck bilden, der Fläche zweiten Grades an, "und wie ganz klar ist, 2 der Kanten gehören den Erzeugenden der einen Art, 2 der Kanten den Er-

Fig. 6.



zeugenden der anderen Art an, da sich ja die Erzeugenden derselben

Art nie schneiden. (Wir haben dementsprechend den Kanten der Figur eine I. bzw. II. beigesezt).

Wir behaupten nun, daß die beiden noch freien Kanten $[2\bar{4}]$ und $[1\bar{3}]$ konjugierte Polaren in Bezug auf die Fläche sind. Wie ist dies zu zeigen?

Offenbar sind sämtliche 4 Ebenen unseres Tetraeders Tangentialebenen unserer Fläche, da jede 2 Erzeugenden derselben enthält. Da nun für eine solche Tangentialebene der Kreuzungspunkt der beiden in ihr liegenden Erzeugenden der Berührungspunkt und damit der Pol in Bezug auf die Fläche ist, so gilt:

„Die Pole (d. h. die Berührungspunkte) der 4 Ebenen unseres Tetraeders fallen bzw. in die 4 Ecken des Tetraeders hinein. In der That enthält daher beispielsweise $1\bar{3}$ die Pole der beiden Ebenen, welche sich längs der Kante $2\bar{4}$ schneiden und umgekehrt.“

Hieraus folgt aber unmittelbar, daß die Kanten

13 und 24 „konjugierte Polaren“ sind.

Wir nehmen nun ein Coordinatentetraeder mit den erwähnten Beziehungen ein „Tangentialtetraeder“. Es entspricht dasselbe dem Tangentialdreieck in Bezug auf ebene Kegelschnitte. (vgl. die Wintervorlesung). Fragen wir uns des ferneren einmal, wie oft wir ein solches Tetraeder bei einer gegebenen Fläche wählen können. Offenbar so oft, wie wir auf dem einschlägigen Hyperboloid oder hyperbolischen Paraboloid ein windschiefes Viereck, das unser Tetraeder bedingt, annehmen können. Hieraus folgt sofort: „Bei gegebenen Flächen zweiten Grades giebt es ∞^4 Tangentialtetraeder, insofern sich die 2mal 2 beliebig zu wählenden Erzeugenden, die als Kanten des Tetraeders in Betracht kommen, unter den einfach unendlich vielen Erzeugenden ihrer Art jedesmal auf je ∞^2 fach verschiedene Weise herausgreifen kann.“

Fragen wir uns aber, wie oft wir die Fläche 2^{ten} Grades in der Form $y_1 y_3 + y_2 y_4 = 0$ darstellen können, so wird die Antwort etwas anders lauten.

Schreiben wir einmal:

$$(\lambda y_1) \left(\frac{y_3}{\lambda} \right) + (\mu y_2) \left(\frac{y_4}{\mu} \right) = 0 \text{ oder}$$

$y'_1 \cdot y'_3 + y'_2 \cdot y'_4 = 0$, so haben wir wieder die frühere Gleichungsform bei demselben Coordinatentetraeder und zwar hängen die neuen

Variablen mit den alten durch die Gleichungen zusammen:

$$y'_1 = \lambda y_1 \quad ; \quad y'_2 = \mu y_2 \quad ;$$

$$y'_3 = \frac{y_3}{\lambda} \quad ; \quad y'_4 = \frac{y_4}{\mu} \quad . \text{ d. h.}$$

„In jedem Tangentialtetraeder lassen sich die Coordinaten y_1, y_2, y_3, y_4 noch auf 2 fach unendlich viele Weise so definieren, daß die Gleichung $y_1 y_2 + y_3 y_4 = 0$ herauskommt, *) daher sich denn die Gleichung Alles in Allem genommen auf 6 Weisen herstellen laßt.“

Dies beiläufig. Wir wollen uns jetzt fragen, wie wir am einfachsten die geraden Linien auf der Fläche darstellen können. Unsere Gleichung wird offenbar befriedigt, wenn wir setzen:

$$y_1 = \lambda y_4 \quad ; \quad \lambda y_3 = -y_2 \quad .$$

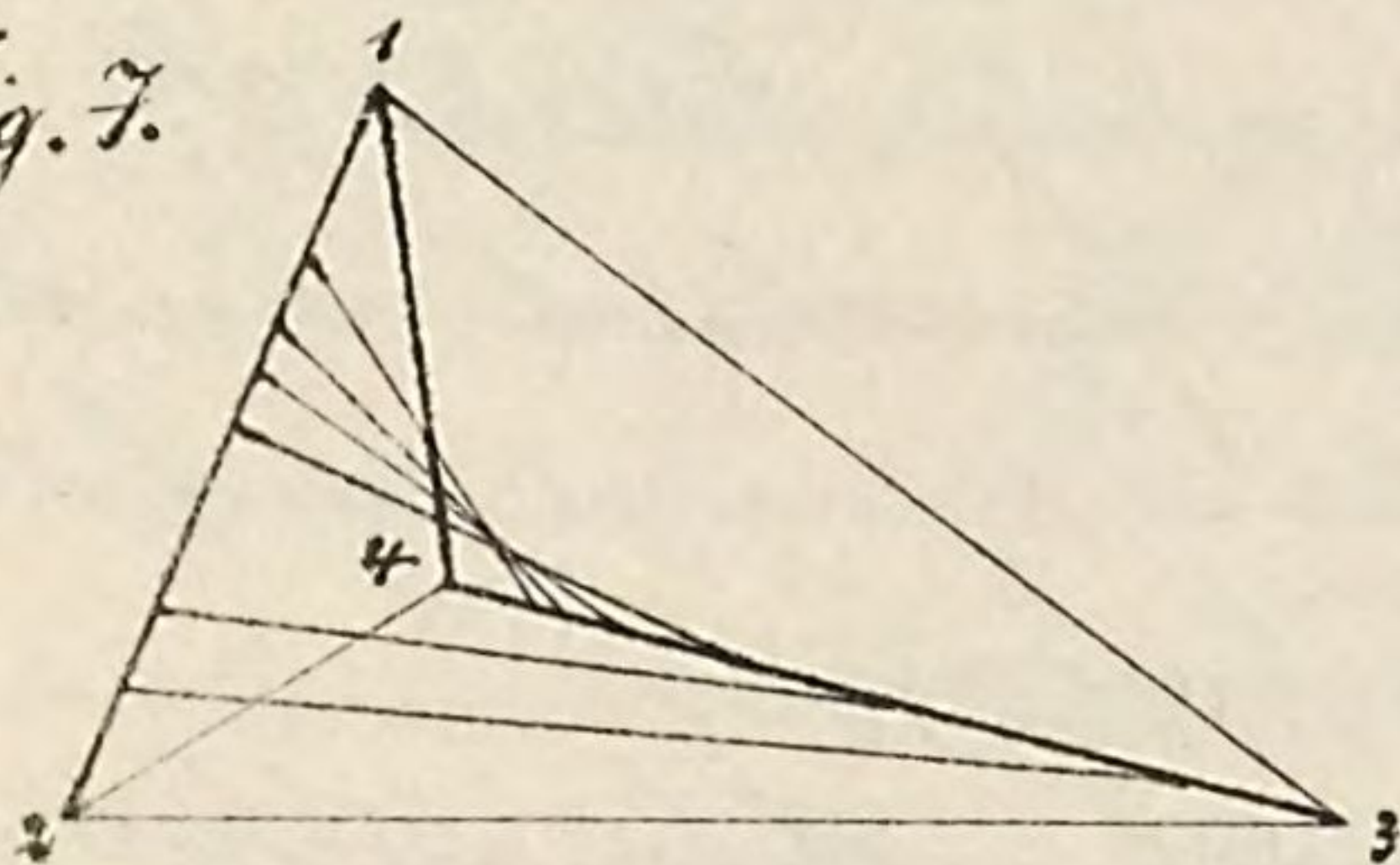
Bei einem festen Werth von λ stellt die erste Gleichung eine Ebene dar, die durch die Kante $2\bar{3}$ hindurchgeht, ebenso die zweite Gleichung eine Ebene, die durch die Kante $1\bar{4}$ hindurchgeht. Beide schneiden sich daher in einer Linie, die sowohl die Kante $2\bar{3}$ wie $1\bar{4}$ trifft. Da nun ganz beliebig gewählt werden kann, so folgt:

*) Es liegt dies wieder an der speciellen Wahl des „Einheitspunktes“.

„Unsere Fläche 2^{ten} Grades trägt eine erste Schaar gerader Linien, welche sich auf die Kanten $2\bar{3}$ und $1\bar{4}$ stützen und unter λ einen Parameter verstanden durch folgende Gleichungspaare dargestellt sind:

$$\begin{aligned} y_1 &= \lambda y_4 \\ -\lambda y_3 &= y_2 \end{aligned}$$

Fig. 7.



Unsere Gleichung $y_1 y_3 + y_2 y_4 = 0$ wird aber auch befriedigt durch das Gleichungspaar:

$$\begin{aligned} y_1 &= \mu y_2 \\ -\mu y_3 &= y_4 \end{aligned}$$

„Unsere Fläche trägt daher noch eine zweite Schaar von geraden Linien, welche sich auf die Kanten $1\bar{2}$ und $3\bar{4}$ stützen und unter μ einen Parameter verstanden durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} y_1 &= \mu y_2 \\ \mu y_3 &= -y_4 \end{aligned} \text{ dargestellt sind.}$$

Diesen beiden Schaaren gehören in der That diejenigen Kanten unseres Tetraeders an, die wir vorher mit I bez. II bezeichneten.

Hier tritt nun gleich hervor, welche Stellung die Flächen zweiten Grades in der synthetischen Geometrie einnehmen.

Es stellt offenbar:

$$y_1 = \mu y_2 \text{ und ebenso}$$

$$\mu y_3 = -y_4$$

bei variablem μ ein Ebenenbüschel dar; diese beiden Ebenenbüschel sind aber projektiv zu einander, wenn wir die gleichen Werthen μ entsprechenden Ebenen einander zuordnen. Der Schnitt, den je zwei solche Ebenen gemein haben, ist eine gerade Linie, die, wie bereits gesagt, ganz der vorliegenden Fläche 2^{ten} Grades angehört. v. Staudt bezeichnet nun die beiden Schaaren der geraden Linien, die auf diese Weise entstehen, als Regelschaaren.

Wir haben daher das Resultat, welches die Stellung der ringförmigen Flächen zweiten Grades im System der synthetischen Geometrie definiert:

„Unsere ringförmige Fläche 2^{ten} Grades ist Trägerin zweier Regelschaaren, und jede dieser Regelschaaren erscheint als der geometrische Ort der Schnittlinien zweier projektiven Ebenenbüschel.“

[Vgl. das Kapitel der Wintervorlesung:
„Die projektive Erzeugung der ebenen Gebilde zweiten Grades.“]

Wir werden uns nun aber in der synthetischen Geometrie nicht auf reelle projektive Ebenenbüschel

zu beschränken brauchen.

Wenn daher hiernach in der synthetischen Geometrie die ringförmigen Flächen zweiten Grades vermöge der genannten Erzeugungsweise vor allen anderen bevorzugt erscheinen, so bedarf es nur einer Ersetzung der reellen Elemente durch komplexe Elemente, um in entsprechender Weise alle beliebigen Flächen 2^{ten} Grades zu erzeugen. —

Jetzt wollen wir geradezu die Liniencoordinaten unserer geraden Linien berechnen.

Die einzelne Erzeugende der zweiten Schaar z. B. ist der Schnitt der beiden Ebenen:

$$\begin{cases} y_1 - \mu y_2 = 0 \\ \mu y_3 + y_4 = 0. \end{cases}$$

Wir haben nun einfach die Matrix der Coefficienten zu bilden:

$$\begin{vmatrix} 1 & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 1 \end{vmatrix} \text{ und aus ihr die Unter-} \\ \text{determinanten.}$$

Diese geben uns sofort die Liniencoordinaten q der Erzeugenden der zweiten Schaar als:

$$q_{12} = 0; \quad q_{13} = \mu; \quad q_{14} = 1.$$

$$q_{34} = 0; \quad q_{42} = \mu; \quad q_{23} = -\mu^2.$$

Nun fragen wir uns: Wenn μ imaginär wird,

was haben diese Linien dann für eine Eigenschaft, sind sie nieder imaginär oder hoch imaginär und, wenn letzteres der Fall ist, sind sie rechts gewundene oder links gewundene?

Wir setzen also:

$\mu = a + bi$, wo $b \geq 0$, und spalten die Linien-coordinaten in $r + is$. Dann ist:

$$r_{12} = 0; \quad r_{13} = a; \quad r_{14} = 1.$$

$$r_{34} = 0; \quad r_{42} = a; \quad r_{23} = -a^2 + b^2.$$

$$s_{12} = 0; \quad s_{13} = b; \quad s_{14} = 0$$

$$s_{34} = 0; \quad s_{42} = b; \quad s_{23} = -2ab.$$

Nun bilden wir uns die Ausdrücke: (r, r) und (s, s) .

Wir finden:

$$(r, r) = (s, s) = +b^2 > 0.$$

Dies besagt nach unseren früheren Auseinandersetzungen:

„Diejenigen Linien der zweiten Erzeugung, welche imaginär sind, sind hiernach hoch imaginär und zwar links gewunden.“

Entsprechend sind dann die imaginären Linien der ersten Erzeugung unserer Fläche ebenfalls hoch imaginär und rechts gewunden.“*)

*) Diese Sätze stimmen damit überein, daß die aufeinander folgenden reellen Linien der einen Art oder der anderen Art gegen einander in dem einen, bez. dem anderen Sinne gewunden sind (die der ersten Art rechts herum, die der zweiten Art links herum).

Hiernach tragen also die ringförmigen Flächen zwei-
ten Grades neben den reellen Erzeugenden nur hoch ima-
ginäre gerade Linien."

In der That, da durch jeden reellen Punkt der F_2 zwei reelle Gerade hindurchlaufen, wie könn-
ten auf der F_2 imaginäre Gerade mit reellen
Punkte existieren?

Wir werden jetzt weiter die beiden Schaaren der geraden
Linien auf den ovalen und den nulltheiligen Flä-
chen zweiten Grades nachzuweisen haben.

Wir beginnen mit den nulltheiligen Flächen.
Hier können wir sogleich 2 Sätze behaupten. Da
die nulltheilige Fläche ja keinen reellen Punkt besitzt,
so werden weder reelle noch nied. imaginäre gerade
Linien auf derselben liegen, d.h. positiv ausgedrückt:
Alle geraden Linien der nulltheiligen Fläche
sind hochimaginäre."

Hieran knüpft sich weiter der Satz, dass eine
Schaar der Erzeugenden aus rechts gewundenen, die
andere aus links gewundenen hoch imaginären
Linien besteht. Denn da die Erzeugenden derselben Schaar
doch eine continuierliche Mannigfaltigkeit bilden,
so wird es nicht angehen, dass Linien derselben Schaar
zum Theil einen rechtsgewundenen, zum Theil einen
linksgewundenen Sinn zeigen; es müßten denn

Linien vorhanden sein, welche den Uebergang bilden, d. h. nieder imaginäre Geraden. Andererseits aber können die Erzeugenden der beiden Schaaren nicht beide zugleich rechts gewunden oder beide links gewunden sein. Wir würden sonst zwei Trassen von nulltheiligen Flächen zu unterscheiden haben, je nach dem Sinn ihrer geradlinigen Erzeugenden, während doch unsere Flächen reellen Projektivitäten gegenüber durchaus ohne Unterschied sind.

Dies sind allgemeine Gründe, deren Stichhaltigkeit man nicht gut bezweifeln kann, doch wird man gern eine analytische Verifikation wünschen. Vorerst wollen wir noch einen anderen Punkt anführen: Da 2 konjugiert imaginäre Linien der hier in Betracht kommenden Art immer gleichzeitig entweder links oder rechts gewunden sind, so ergibt sich sofort der Satz:

Jede der beiden Schaaren von Erzeugenden ist sich selbst konjugiert imaginär.

Wir gehen nun zur analytischen Verifikation der vorhin ausgesprochenen Sätze über:

Die Gleichung der nulltheiligen Fläche war auf die Gestalt gebracht:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0 \quad \text{oder}$$

$$(x_1 + ix_3)(x_1 - ix_3) + (x_2 + ix_4)(x_2 - ix_4) = 0, \text{ wofür wir schreiben:}$$

$$y_1 y_3 + y_2 y_4 = 0.$$

Hierdurch haben wir ein Tangentialtetraeder als Coordinatentetraeder zu Grunde gelegt, allerdings hat dasselbe imaginäre Ebenen und Ecken. Reell ist nur die Kante, längs der sich die Ebenen $y_1 = 0$ und $y_3 = 0$ schneiden und die gegenüberliegende Kante, längs welcher sich die Ebenen $y_2 = 0$, $y_4 = 0$ schneiden, so daß wir auch sagen können:

„Reell sind von dem Tangentialtetraeder nur diejenigen beiden Kanten, welche konjugierte Polaren in Bezug auf die Fläche 2^{ten} Grades sind.“

Dies Auftreten imaginärer Elemente in dem Tangentialtetraeder hindert jedoch durchaus nicht, die beiden Schaaren der geraden Linien in derselben Weise wie in voriger Vorlesung zu bilden als:

$$\text{Erste Art: } \begin{cases} y_1 = \lambda y_4 \\ \lambda y_3 = -y_2 \end{cases} \quad \text{Zweite Art: } \begin{cases} y_1 = \mu y_2 \\ \mu y_3 = -y_4 \end{cases}$$

Da y_1 und y_4 bereits imaginär sind, so hat es keinen Zweck, sich auch nur vorübergehend auf reelle Werthe von λ und μ zu beschränken, wir setzen vielmehr gleich:

$$\lambda = a + ib$$

$\mu = c + id$ und geben außerdem zu dem Coordinatensystem der x zurück. Wir erhalten dann für die Erzeugenden der ersten Art

die beiden Gleichungen:

$$\begin{cases} x_1 + ix_3 = (a + ib)(x_2 - ix_4) \\ (a + ib)(x_1 - ix_3) = -x_2 - ix_4 \end{cases}$$

oder geordnet:

$$\begin{cases} x_1 - (a + ib)x_2 + ix_3 + i(a + ib)x_4 = 0 \\ (a + ib)x_1 + x_2 - i(a + ib)x_3 + ix_4 = 0 \end{cases}$$

Hieraus werden wir die Coordinaten $q_{\alpha\beta}$ unserer geraden Linien bekommen, wenn wir die Determinanten der folgenden Matrix aus den Coefficienten bilden:

$$\begin{vmatrix} 1 & -(a + ib) & i & i(a + bi) \\ a + bi & 1 & -i(a + ib) & i \end{vmatrix},$$

woraus erfolgt:

$$q_{12} = 1 + (a^2 - b^2) + 2iab, \quad q_{13} = +2b - 2ai.$$

$$q_{34} = -1 - a^2 + b^2 - 2iab, \quad q_{42} = -2b + 2ai.$$

$$q_{14} = 2ab + i(1 - a^2 + b^2).$$

$$q_{23} = -2ab - i(1 - a^2 + b^2).$$

oder wenn wir die Coordinaten in ihren reellen und imaginären Bestandtheil spalten:

$$r_{12} = 1 + a^2 - b^2, \quad r_{13} = 2b, \quad r_{14} = 2ab.$$

$$r_{34} = -(1 + a^2 - b^2), \quad r_{42} = -2b, \quad r_{23} = -2ab.$$

und:

$$s_{12} = 2ab, \quad s_{13} = -2a, \quad s_{14} = 1 - a^2 + b^2.$$

$$s_{34} = -2ab, \quad s_{42} = +2a, \quad s_{23} = -(1 - a^2 + b^2).$$

Man überzeugt sich leicht, daß, wie es ja auch

sein muß:

$(r, r) = (s, s)$ ist, und zwar wird:

$$(r, r) = (s, s) = -1 - 2a^2 - 2b^2 - a^4 - 2a^2b^2 - b^4.$$

Da der Ausdruck links nun stets negativ ist, so erkennen wir die Richtigkeit unseres auf pag. 75 angeführten Satzes für die Erzeugenden der ersten Art.

Führen wir die Entwicklung analog für die Erzeugenden zweiter Art durch, so werden wir für diese finden:

$$(r, r) = (s, s) = 1 + 2c^2 + 2d^2 + c^4 + 2c^2d^2 + d^4, \text{ wodurch}$$

der Ausdruck links stets positiv ist.

Wir haben daher den Satz:

„Die Erzeugenden der ersten Art sind rechts gewunden, die Erzeugenden der zweiten Art sind links gewunden. (gemäß unserer Verabredung über die Reihenfolge der Coordinaten.)“

Wir wollen nun unsere Formeln benutzen, um eine neue Frage aufzuwerfen.

Es seien durch:

$$\lambda = a + ib$$

$\lambda' = a' + ib'$ die Parameter bezeichnet, die zu zwei konjugiert imaginären Erzeugenden gehören.

Es ist die Frage, wie hängen λ und λ' zusammen?

Eine ähnliche Frage haben wir im vorigen Winter

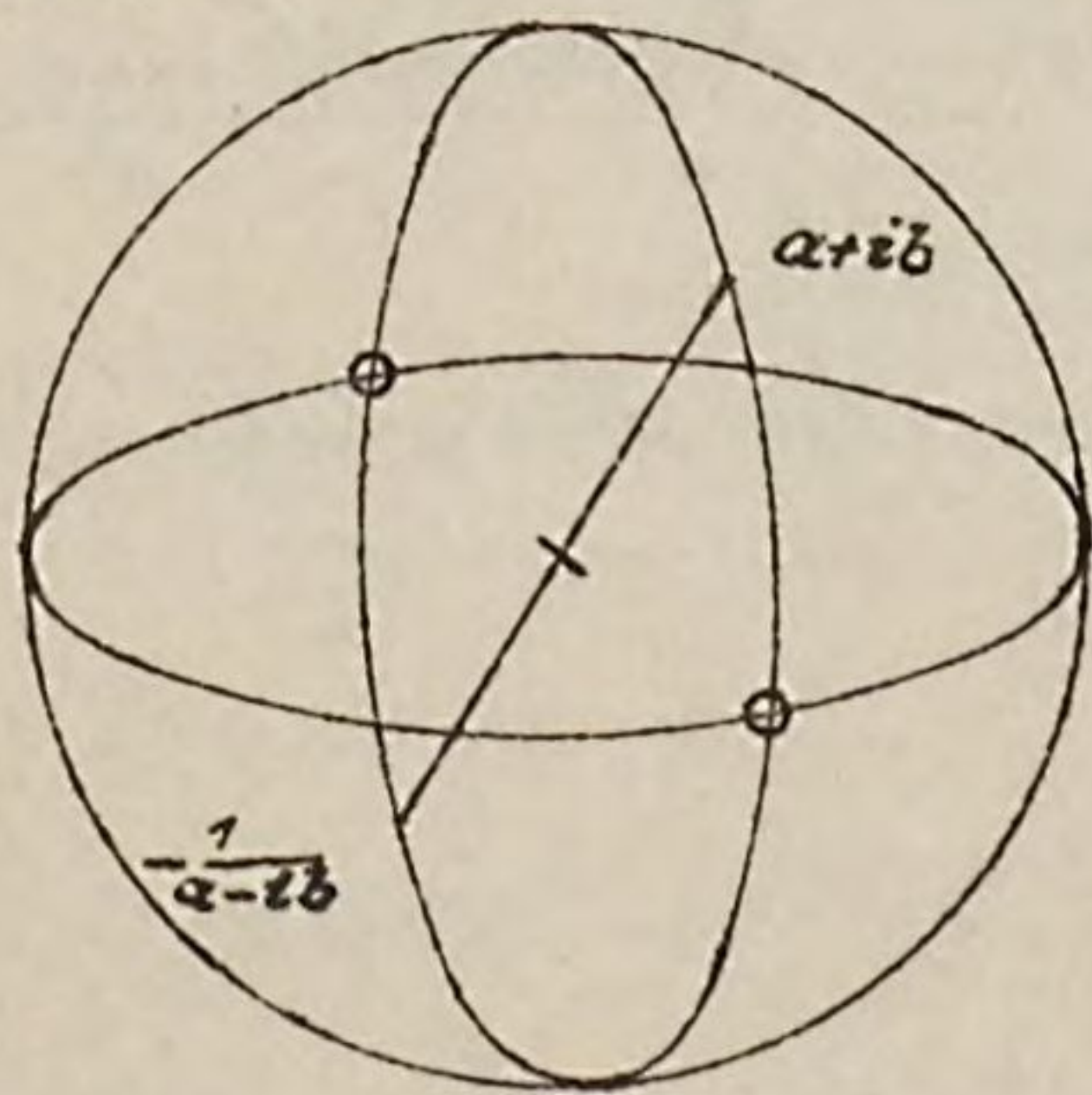
bei der Betrachtung der Kegelschnitte beantwortet.

Wir hatten daselbst geschieden zwischen eintheiligen und nulltheiligen Kegelschnitten und in Betreff derselben folgenden Satz aufgestellt:

„Konjugiert imaginäre Punkte eines eintheiligen Kegelschnittes bekommen konjugiert imaginäre Parameterwerthe λ . Konjugiert imaginäre Punkte eines nulltheiligen Kegelschnittes bekommen diametral imaginäre Parameterwerthe λ'' . [v. Winter, vorlesung]. Unter diametral imaginären Werthen λ'' hatten wir dabei folgendes verstanden:

Wenn wir die Größe $a + ib$ in gewöhnlicher Weise auf der Kugel deuten, dann gehört zu dem Punkte $a + ib$ ein diametral gegenüberliegender Punkt.

Fig. 8.



Ist $a + ib = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi)$, so ist dieser zweite Punkt $= -\frac{1}{\rho} (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ oder, wenn wir Zähler und Nenner mit $\cos \varphi - i \sin \varphi$ multiplizieren:

$$= \frac{-1}{\rho (\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \frac{-1}{a - ib}.$$

„Diesen Werth $\frac{-1}{a - ib}$ bezeichnen wir dementsprechend als diametrale Größe zu $a + ib$.“

Wir werden die Analogie des Satzes über die Kegelschnitte

mit der uns vorliegenden Frage betreffs der konjugiert imaginären Erzeugenden jetzt leicht erkennen. Es gelten ja, wie gezeigt, z. B. bei den Erzeugenden der ersten Art die Gleichungen:

$$\begin{cases} x_1 + ix_3 = (a + ib)(x_2 - ix_4) \\ (a + ib)(x_1 - ix_3) = -x_2 - ix_4 \end{cases}$$

Setzen wir, um die konjugiert imaginären Gerade zu erhalten, hierin für i ein $-i$ so kommt:

$$\begin{cases} x_1 - ix_3 = (a - ib)(x_2 + ix_4) \\ (a - ib)(x_1 + ix_3) = -x_2 + ix_4 \end{cases}$$

oder anders geschrieben:

$$\begin{cases} x_1 + ix_3 = \frac{-1}{a - ib} \cdot (x_2 - ix_4) \\ \frac{-1}{a - ib} \cdot (x_1 - ix_3) = -x_2 - ix_4 \end{cases}$$

Wir erkennen, daß diese Gleichungen der konjugiert imaginären Geraden gleichfalls den ersten Typus tragen, nur ist statt $a + ib$ die diametrale Größe $\frac{-1}{a - ib}$ gesetzt. Dies besagt:

„Auf der nulltheiligen Fläche haben konjugiert imaginäre Erzeugende diametrale Parameter.“

Dagegen haben, wie wir ergänzend bemerken können, auf den ringförmigen Flächen konjugiert imaginäre Erzeugende konjugierte Parameter.

Wir gehen jetzt zu den ovalen Flächen 2^{ten} Gra. über, welche die Gleichungsform haben

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0$, mag man sich hierunter eine Kugel, ein Ellipsoid, ein zweischaliges Hyperboloid oder ein elliptisches Paraboloid denken.

Reelle Erzeugende werden auch hier nicht auftreten können. da wir jedoch ∞^2 reelle Punkte auf einer solchen Fläche haben, so werden wir ∞^2 nieder imaginäre Erzeugende bekommen, und zwar werden je zwei konjugiert imaginäre Erzeugende dieser Art demselben realen Punkt der Fläche zugehören und sich also auf die beiden Schaaren von Erzeugenden vertheilen. Wir behaupten noch mehr:

Mit diesen so gefundenen nieder imaginären Geraden haben wir die sämtlichen Erzeugenden der ovalen Flächen 2^{ten} Grades erschöpft. Es giebt bei ihnen keine hochimaginäre Geraden."

Dies wäre wieder in gewohnter Weise analytisch nachzuweisen:

Wir schreiben die Gleichung der Fläche:

$$(x_1 + ix_3)(x_1 - ix_3) + (x_2 + x_4)(x_2 - x_4) = 0, \text{ oder}$$

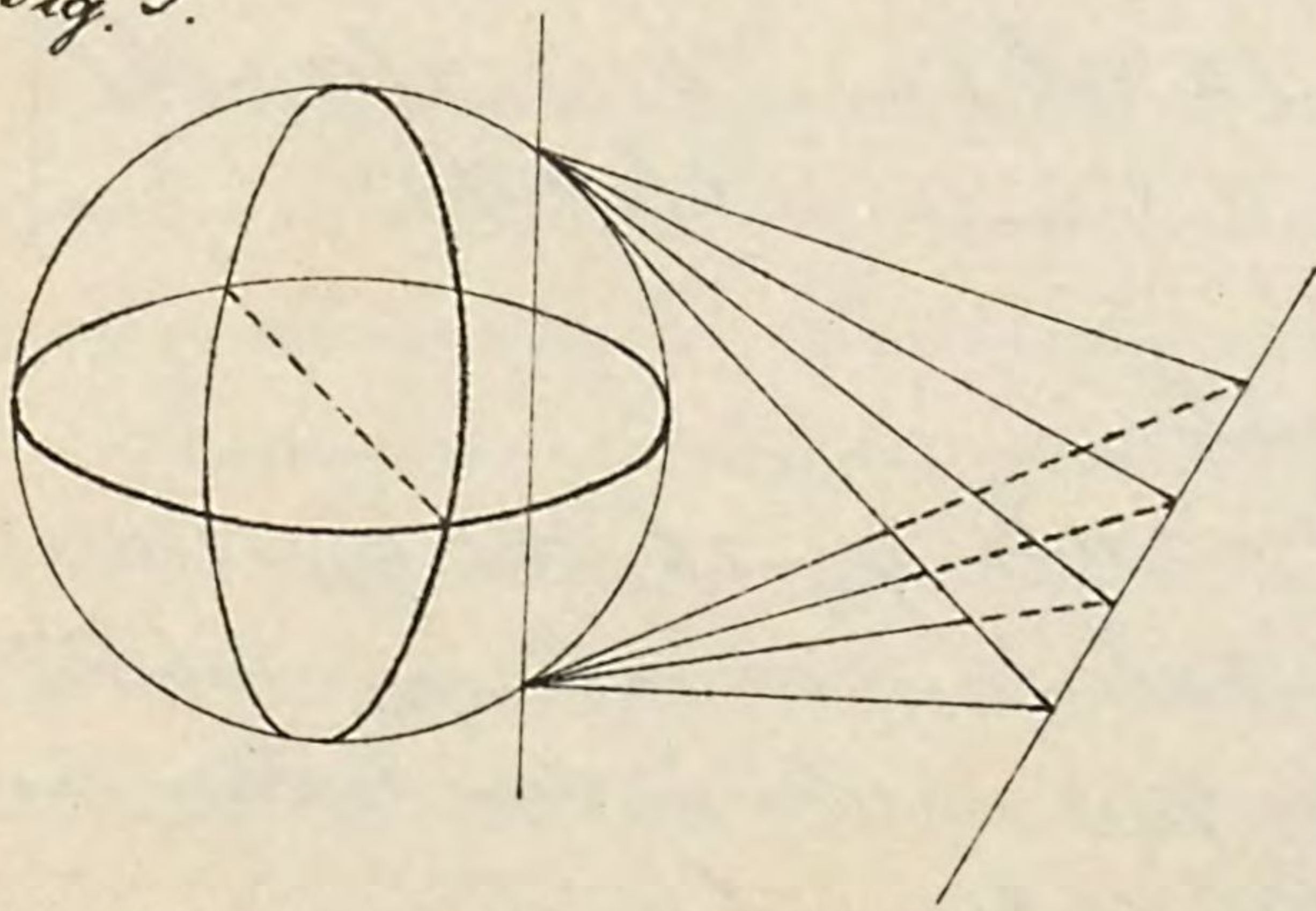
$$y_1 y_3 + y_2 y_4 = 0.$$

In dem so zu Grunde gelegten Tangentialtetraeder findet sich zunächst die reelle Kante $x_1 = 0, x_3 = 0$ als Schnitt der Ebenen $y_1 = 0, y_3 = 0$; ferner ist die

gegenüberliegende Kante der Schnitt zweier reeller
 Seitenebenen: $y_2 = 0$, $y_4 = 0$ oder $x_2 \pm x_4 = 0$. Hieraus
 folgt, daß auch die beiden Eckpunkte, in welchen
 die erste Kante diese Ebenen durchsetzt, reell sind.
„Unser Tetraeder hat daher wieder 2 reelle Kanten,
 welche konjugierte Polaren in Bezug auf die Fläche
 sind. Die eine schneidet die Fläche in 2 reellen
 Punkten, von der anderen gehen an die Fläche 2
 reelle Tangentialebenen.“

Hieraus ergibt sich eine einfache Konstruktion
 für ein solches Tangentialtetraeder bei einer ova-
 len Fläche, als welche wir in der Figur der Einfach-
 heit wegen eine Kugel wählen wollen:

Fig. 9.



Wir erhalten
 dasselbe, indem
 wir irgend zwei
 reelle Punkte
 der Fläche durch
 eine gerade Li-
 nie verbinden, und
 andererseits deren
 Tangentialebenen
 in einer zweiten
 geraden Linie

zum Schnitt bringen, endlich das windschiefe Viereck

der imaginären Geraden hinzufügen, welche auf der Fläche von den beiden reellen Punkten aus laufen oder in den beiden reellen Ebenen liegen."

Wir wollen jetzt zur Darlegung der geraden Linien auf den ovalen Flächen schreiten.

Die Erzeugenden erster Art sind gegeben durch:

$$\begin{cases} y_1 = \lambda y_4 \\ \lambda y_3 = -y_2 \text{ oder} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + ix_3 = (a + ib)(x_2 - x_4) \\ (a + ib)(x_1 - ix_3) = -x_2 - x_4. \end{cases}$$

oder geordnet:

$$\begin{cases} x_1 - (a + ib)x_2 + ix_3 + (a + ib)x_4 = 0 \\ (a + ib)x_1 + x_2 - i(a + ib)x_3 + x_4 = 0, \end{cases} \text{ so daß die Coefficientenmatrix für die Bestimmung der } q_{\alpha\beta} \text{ die Gestalt hat.}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -(a + ib) & i & +(a + ib) \\ a + ib & 1 & -i(a + ib) & 1 \end{vmatrix}.$$

Hieraus ergeben sich:

$$q_{12} = 1 + a^2 - b^2 + 2abi, \quad q_{13} = 2b - 2ai, \quad q_{14} = 1 - a^2 + b^2 - 2abi; \\ q_{34} = i(1 + a^2 - b^2) - 2ab, \quad q_{42} = 2a + 2bi, \quad q_{23} = -2ab + i(-1 + a^2 - b^2).$$

Spalten wir die $q_{\alpha\beta}$ wieder in den reellen und imaginären Teil, so kommt:

$$r_{12} = 1 + a^2 - b^2; \quad r_{13} = 2b; \quad r_{14} = 1 - a^2 + b^2; \\ r_{34} = -2ab; \quad r_{42} = 2a; \quad r_{23} = -2ab.$$

woraus folgt:

$$\begin{aligned} (r, r) = & -2ab - 2a^3b + 2ab^3 \\ & + 4ab + 2a^3b - 2ab^3 \\ & - 2ab = 0, \text{ d. h.} \end{aligned}$$

Alle geraden Linien sind niederimaginär.

Die konjugiert imaginäre Gerade zu der betrachteten wird des weiteren gegeben durch

$$\begin{cases} x_1 - ix_3 = (a - ib)(x_2 - x_4) \\ (a - ib)(x_1 + ix_3) = -x_2 - x_4 \end{cases}$$

Da diese Gleichungen auch in der Form geschrieben werden können:

$$\begin{aligned} x_1 + ix_3 &= -\frac{1}{a - ib}(x_2 + x_4) \quad \text{d. h. } y_1 = \mu \cdot y_2 \\ -\frac{1}{a - ib} \cdot (x_1 - ix_3) &= -(x_2 - x_4) \quad \mu \cdot y_3 = -y_4 \end{aligned}$$

so ergibt sich der Satz:

Die konjugiert imaginäre Linie einer Erzeugenden der einen Art gehört der anderen Art an und wird für den diametralen Parameterwerth erhalten.

Ein besonderes Interesse bieten nun die Sätze wegen ihrer Beziehung zur Funktionentheorie.

Wir sind gewohnt, die komplexe Größe $a + ib$ auf der Kugel zu deuten, indem wir jedem Punkte derselben einen Werth $a + ib$ zuordnen und umgekehrt. Wir behaupten jedoch weiter:

Wenn man in der Funktionentheorie den reellen

Punkten einer Kugel komplexe Werthe $a + ib$ beilegt, so sind dies gerade die Parameterwerthe, welche die auf der Kugel verlaufenden Erzeugenden der einen Art, deren jede ja einem reellen Punkte eindeutig zugeordnet ist, im Sinne der hier vorgehenden Entwicklungen unter Zugrundelegung eines geeigneten Tangentialtetraeders besitzen."

Dies ergibt sich sofort, wenn wir die Gleichung der Kugel: $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$, indem wir zu einem Tangentialtetraeder übergehen, schreiben als:

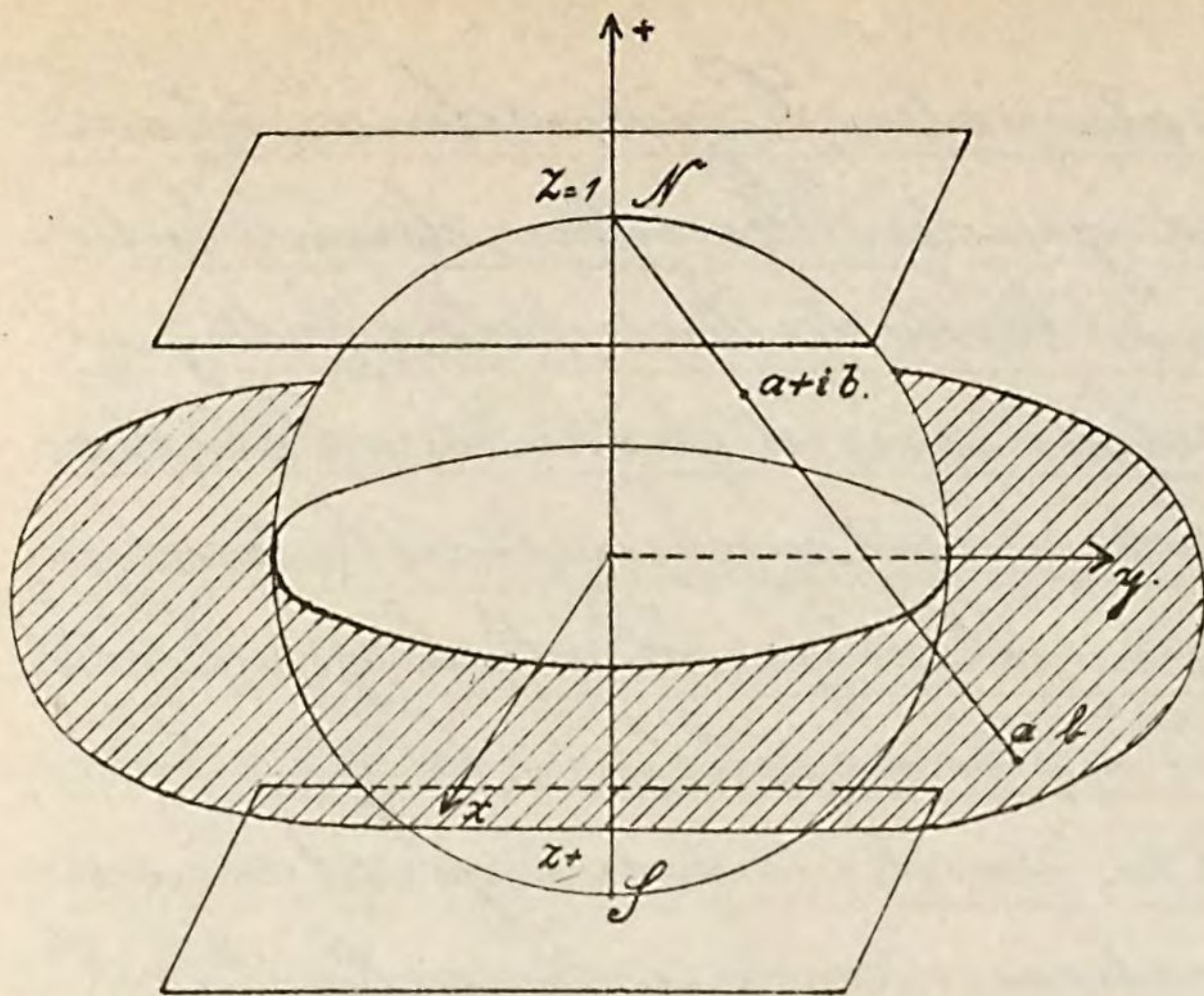
$$(x + iy)(x - iy) - (1 + z)(1 - z) = 0.$$

Wir erkennen leicht: Der oberste und der unterste Punkt der Kugel, der Nord- und Süd-Pol, sind die beiden reellen Ecken, die Tangentialebenen in diesen Punkten die reellen Seitenflächen des Tangentialtetraeders; der Schnitt der letzteren, d. h. die ∞ weite Gerade der Aequatorebene ist die zweite reelle Kante des Tetraeders.

Wir projicieren nun bekanntlich vom Punkte $z = 1$ aus die Punkte der Aequatorebene mit den Coordinaten a, b auf die Kugel und geben den Bildpunkten alsdann die Bezeichnung $a + ib$. Bezeichnen wir die rechtwinkligen Coordinaten des Bildpunktes mit x, y, z , so wird:

$$x : y : 1 - z = a : b : 1, \text{ woraus folgt:}$$

$$a + ib = \frac{x + iy}{1 - z}.$$



Diese Formel giebt also an, wie sich das $a + ib$ des Kugelpunktes aus dessen rechtwinkligen Coordinaten zusammen setzt.

Wie aber setzt sich der Parameter $a + ib$

für die geradlinigen Erzeugenden der einen Art aus den Coordinaten der zugehörigen Kugelpunkte zusammen? Die Erzeugenden der ersten Art sind durch die Gleichungen gegeben:

$$x + iy = \lambda (1 - z),$$

$$\lambda \cdot (x - iy) = 1 + z, \text{ aus deren erster folgt:}$$

$$\lambda = \frac{x + iy}{1 - z}. \text{ Dies ist aber genau die obige}$$

Formel für $a + ib$. Hiermit ist die in Aussicht gestellte Uebereinstimmung erwiesen.

Diese Uebereinstimmung unserer projektiven Betrachtungen mit dem geometrischen Satze der Funktionentheorie ist offenbar mehr als eine zufällige. Wir haben als tieferen Grund dafür, daß man (in der Funktionentheorie) $a + ib$ so schön auf der Kugel interpretieren kann, diesen anzusehen, daß die Punkte der Kugel ein-eindeutig bezogen werden können

auf die Curven einer rationalen Curvenschaar, nämlich der Schaar der erzeugenden Geraden, deren Individen sich durch einen Werth des Parameters festlegen lassen. Andererseits sehen wir, daß wir eine Interpretation von $a + ib$ auf der Kugel noch auf viele andere Weise einführen können, als es gewöhnlich geschieht, indem wir nicht von dem rechtwinkligen Coordinatensystem $x y z$, sondern von irgend einem Polartetraeder ausgehen, das zur Kugel gehört."

Ueberdies können wir endlich sogar statt der Kugel zur Deutung von $a + ib$ ebenso gut irgend eine andere ovale Fläche zweiten Grades zu Grunde legen."

In diesen Sätzen liegt die funktionentheoretische Bedeutung begründet, welche unsere Betrachtungen über Nicht-Euklidische Geometrie (Cayley's Maafbestimmung) später gewinnen sollen.

"Wir wollen jetzt nur noch eine Bemerkung über die Einführung von $a + ib$ in der Ebene machen. Auch diese können wir so deuten, daß sie mit unserem bisherigen Gedankengang übereinstimmt."

Durch jeden Punkt in der Ebene geht doch ein ganzes Büschel von geraden Linien hindurch, mag der Punkt selbst reell oder imaginär sein.

Wir setzen denselben jetzt imaginär voraus, und schreiben das Büschel:

$$p + \lambda \cdot q = 0, \text{ wo } \lambda = a + ib \text{ ist.}$$

Für jeden Werth von λ erhalten wir dann in all., gemeinen eine imaginäre gerade Linie, welche als solche nur einen reellen Punkt trägt.

Es giebt hierbei nur einen Ausnahmefall, unter den Geraden $p + \lambda q = 0$ giebt es eine reelle Linie, nämlich die Linie, welche den imaginären Punkt mit seinem conjugiert imaginären verbindet. Wir können annehmen, daß diese reelle Gerade durch $q = 0$ gegeben werde; ihr entspricht daher der Werth $\lambda = \infty$.

Offenbar haben wir so die Möglichkeit, in der Ebene eine Deutung von $a + ib$ zu konstruieren, der Art, daß wir alle geraden Linien $p + \lambda q = 0$ eines Büschels zu Grunde legen, welches von einem imaginären Punkt ausstrahlt, und nun jedem reellen Punkte der Ebene das λ derjenigen Büschelgeraden zuordnen, die durch ihn hindurchgeht. Dann wird auch jedem λ nur ein Punkt der Ebene hinzugehören, bis auf den einen ausgezeichneten Werth von λ , sagen wir $\lambda = \infty$, welcher der geraden Linie zugehört, die den imaginären Mittelpunkt des Büschels mit dem conjugiert imaginären Punkte verbindet. Diesem Werthe von λ gehören alle reellen

Punkte der genannten Linie an."

Wir behaupten nun, daß diese Deutung der imaginären Werthe $a + ib$ in der Ebene die gewöhnliche Deutung des $a + ib$ einschließt, und zwar:

"ergiebt sich die gewöhnliche Darstellung von $a + ib$ in der Ebene, wenn wir als imaginären Büschelmittelpunkt den einen Kreispunkt zu Grunde legen, wobei die reelle Verbindungslinie mit dem konjugiert imaginären Punkte die unendlich weite Gerade der Ebene wird."

Um dies zu beweisen, stellen wir die Gleichung des Büschels, das den einen Kreispunkt als Träger hat, wirklich auf: $x + iy = \lambda$. (oder homogen geschrieben $x + iy = \lambda t$.) Wir fragen uns nun, welches ist der reelle Punkt, welcher für $\lambda = a + bi$ auf der Büschelgeraden $x + iy = a + bi$ liegt.

Offenbar wird derselbe gegeben durch: $x = a$
 $y = b$.

Dieser Punkt bekommt alsdann die Marke $a + bi$, und wir erkennen hierin sofort die elementare Regel. Wenn aber $\lambda = \infty$ wird, so wird $x + iy = \infty$, d. h. $t = 0$. Dies ist der Ausnahmefall, welcher hier die ∞ weite Gerade ergiebt. Jedem unendlich weiten Punkte der Ebene ertheilen wir also die Marke $\lambda = \infty$; dies ist dasselbe, was man wohl mit den Worten ausspricht:

„In der Funktionentheorie hat die Ebene nicht eine ∞ weite Gerade, sondern nur einen unendlich weiten Punkt $\lambda = \infty$.“

Man erkennt, worauf diese Betrachtungen abzielen.

„Es wird überhaupt eine Aufgabe dieser Vorlesung sein, die geometrischen Konstruktionen und Sätze, welche man sonst in der Funktionentheorie auf elementare Weise begründet, auf die Grundsätze der projektiven Geometrie zu stützen, womit von selbst sich eine größere Geschmeidigkeit und „allgemeinheit“ dieser Konstruktionen und Sätze ergeben wird.“

Wir wollen jetzt in einem vierten Kapitel von den Collineationen des Raumes reden.

IV.

Wir stellen uns zuvörderst wieder auf den allgemeinen algebraischen Standpunkt.

Wir sagen alsdann: zwei Räume sind collinear, wenn zwischen ihren Punktkoordinaten die Beziehungen bestehen:

$$\S y_a = \sum_{\beta} c_{a\beta} x_{\beta}, \text{ für } a = 1, 2, 3, 4.$$

Man fügt zudem meist die Bedingung hinzu, daß die Determinante der Coefficienten $|c_{a\beta}| \neq 0$ ist, d.h. die

Bedingung, welche angiebt, daß die angeführten Beziehungen sich auch umkehren lassen. Doch ist es oft auch von Interesse, die Fälle verschwindender Determinante zu behandeln. Man vergleiche in dieser Hinsicht die Vorlesung 1881/82 über „projective Geometrie“, in der als Ausgangspunkt ein solcher Fall gewählt ist. Es handelte sich dort darum, den ganzen Raum auf eine Ebene zu beziehen. [nach Art der „malerischen Perspektive.“]. Collineation nennt man die aufgestellte Beziehung, weil jeder geraden Linie des Raumes x eine Gerade des Raumes y entspricht.

Wir haben ferner bereits im vorigen Winter gelernt, daß diese geometrische Eigenschaft umgekehrt charakteristisch ist für die analytische Beziehung, mit der wir es hier zu thun haben.

„Die Collineation ist das geometrische Gegenbild der linearen Substitution.“

Wir betrachten weiter die speciellere Aufgabe, die sich ergibt, wenn wir x und y in demselben Raume deuten. Es drängt sich dann nämlich sofort die Frage auf, ob es nicht Punkte giebt, die sich selbst entsprechen. Solche Punkte werden offenbar durch unsere Gleichung gegeben, wenn wir y_x mit x_x vertauschen. Wir haben also dann:

$\S. x_\alpha = \sum_\beta c_{\alpha\beta} x_\beta$, für $\alpha = 1, 2, 3, 4$ oder ausführlich geschrieben:

$$0 = (c_{11} - \S) x_1 + c_{12} x_2 + c_{13} x_3 + c_{14} x_4.$$

$$0 = c_{21} x_1 + (c_{22} - \S) x_2 + c_{23} x_3 + c_{24} x_4.$$

$$0 = c_{31} x_1 + c_{32} x_2 + (c_{33} - \S) x_3 + c_{34} x_4.$$

$$0 = c_{41} x_1 + c_{42} x_2 + c_{43} x_3 + (c_{44} - \S) x_4.$$

Durch Elimination der x_1, x_2, x_3, x_4 bekommen wir für $\S$ die sogenannte „charakteristische Gleichung:

$$\begin{vmatrix} c_{11} - \S & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} - \S & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} - \S & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} - \S \end{vmatrix} = 0.$$

Die nähere Untersuchung der festbleibenden Punkte hängt alsdann von den Specialfällen dieser Gleichung ab, und es giebt in dieser Hinsicht eine erschöpfende Theorie, die Elementarteilertheorie von Weierstraß. [1868. Berliner Monatsberichte. „Zur Theorie der bilinearen Formen“]. Dieselbe, die sich überhaupt auf die Classification von Determinanten folgender Art bezieht:

$$\begin{vmatrix} c_{11} - d_{11} \S & c_{12} - d_{12} \S & \dots & c_{1n} - d_{1n} \S \\ c_{21} - d_{21} \S & c_{22} - d_{22} \S & \dots & c_{2n} - d_{2n} \S \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} - d_{n1} \S & c_{n2} - d_{n2} \S & \dots & c_{nn} - d_{nn} \S \end{vmatrix},$$

findet bei den verschiedensten algebraischen Fragen ihre Anwendung, so im vorigen Winter in den Lamé'schen Funktionen, als es sich um das gemeinsame Polartetraeder zweier Flächen 2^{ten} Grades handelte, so jetzt, wo es sich um die festbleibenden Punkte einer Collineation handelt.

Die specielle Frage der Collineation ist im Sinne der Elementarteilertheorie von Segre, einem jungen italienischen Geometer, behandelt im Bd. 19 der Memorie dei Licei 3. ser. 1884. unter dem Titel Classificazione delle omografie, und zwar für den Fall von n homogenen Variablen. Wir geben dies Citat um so lieber, zumal wir nicht eingehend diesen Betrachtungen uns werden hingeben können.

„Die Elementarteilertheorie hat es nämlich mit der Frage zu thun, ob gegebenenfalls unsere charakteristische Gleichung vielfache Wurzeln hat, und wie sich in einem solchen Falle für einen vielfachen Wurzelwerth die Unterdeterminanten verhalten.“

Von all den Möglichkeiten, die sich in dieser Hinsicht bei $n=4$ ergeben, wollen wir nur 3 auführen:

1.) Die charakteristische Gleichung möge 4 getrennt

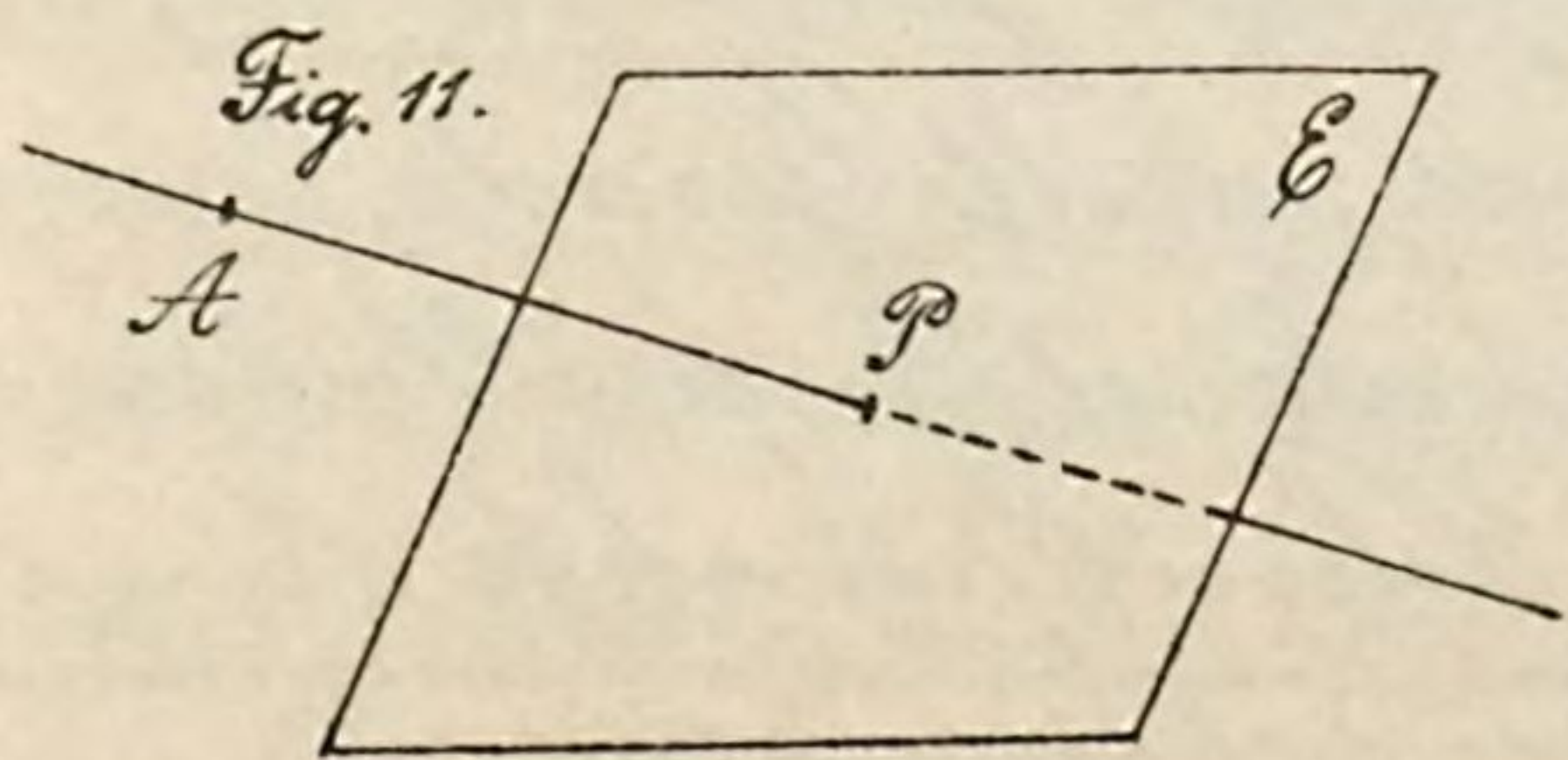
te Wurzeln $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$ besitzen. In diesem allgemei-
nen Falle wird jedem Wurzelwerthe ζ ein bestimm-
ter festbleibender Punkt entsprechen.

„Im „allgemeinen“ bleiben daher bei einer
Collineation 4 getrennte Punkte fest.“

2, Es seien 3 Wurzeln $\zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$ einander gleich,
die vierte Wurzel ζ_1 von ihnen verschieden.

Außerdem wollen wir voraussetzen, daß für den
Werth $\zeta = \zeta_2$ auch alle 2^{ten} Unterdeterminanten,
[und damit natürlich auch die ersten Unter-
determinanten] verschwinden sollen, (was keines-
wegs stets der Fall zu sein braucht). Für $\zeta = \zeta_1$
sind alsdann die 4 Gleichungen $\zeta x_i = \sum c_{\alpha\beta} x_\beta$ schlecht-
weg miteinander verträglich, d. h. eine ist eine
Folge der übrigen, dagegen für $\zeta = \zeta_2$ sind 3 der
selben überflüssig, wir behalten nur eine Gleichung
zur Bestimmung der x übrig.

Die geometrische Deutung ist, daß $\zeta = \zeta_1$ entspre-
chend ein einzelner Punkt A des Raumes fest-
bleibt, für die dreifache Wurzel $\zeta = \zeta_2$ aber eine
ganze Ebene $\mathcal{E}$ von Punkten festbleibt.“



Zieht man durch
den Punkt A eine beliebige
Gerade, so erkennt
man, daß auch diese

als solche festbleibt, doch so, daß auf ihr die einzelnen Punkte eine Verschiebung erleiden können, (ausgenommen die Punkte A und B).

Diese Art der Collineation giebt dann geometrisch den Fall der sogenannten Centralprojektion *) in, dem alle Punkte auf geraden Linien verrückt werden, welche durch ein festes Centrum laufen, so zwar, daß die Punkte einer gewissen festen Ebene, der Hauptebene der Perspektive auch noch sämtlich ungeändert bleiben."

3, Es sei jetzt $S_1 = S_2$ und $S_3 = S_4$. Außerdem wollen wir annehmen, daß für jede dieser Doppelwurzeln alle ersten Unterdeterminanten in $|C_{\alpha\beta}|$ gleich 0 sind, d. h. daß jedesmal von den 4 Gleichungen nur 2 in Betracht kommen.

Dann bekommen wir für jede der beiden Doppelwurzeln eine aus festbleibenden Punkten bestehende gerade Linie als Schnitt der durch die beiden Gleichungen dargestellten Ebenen."

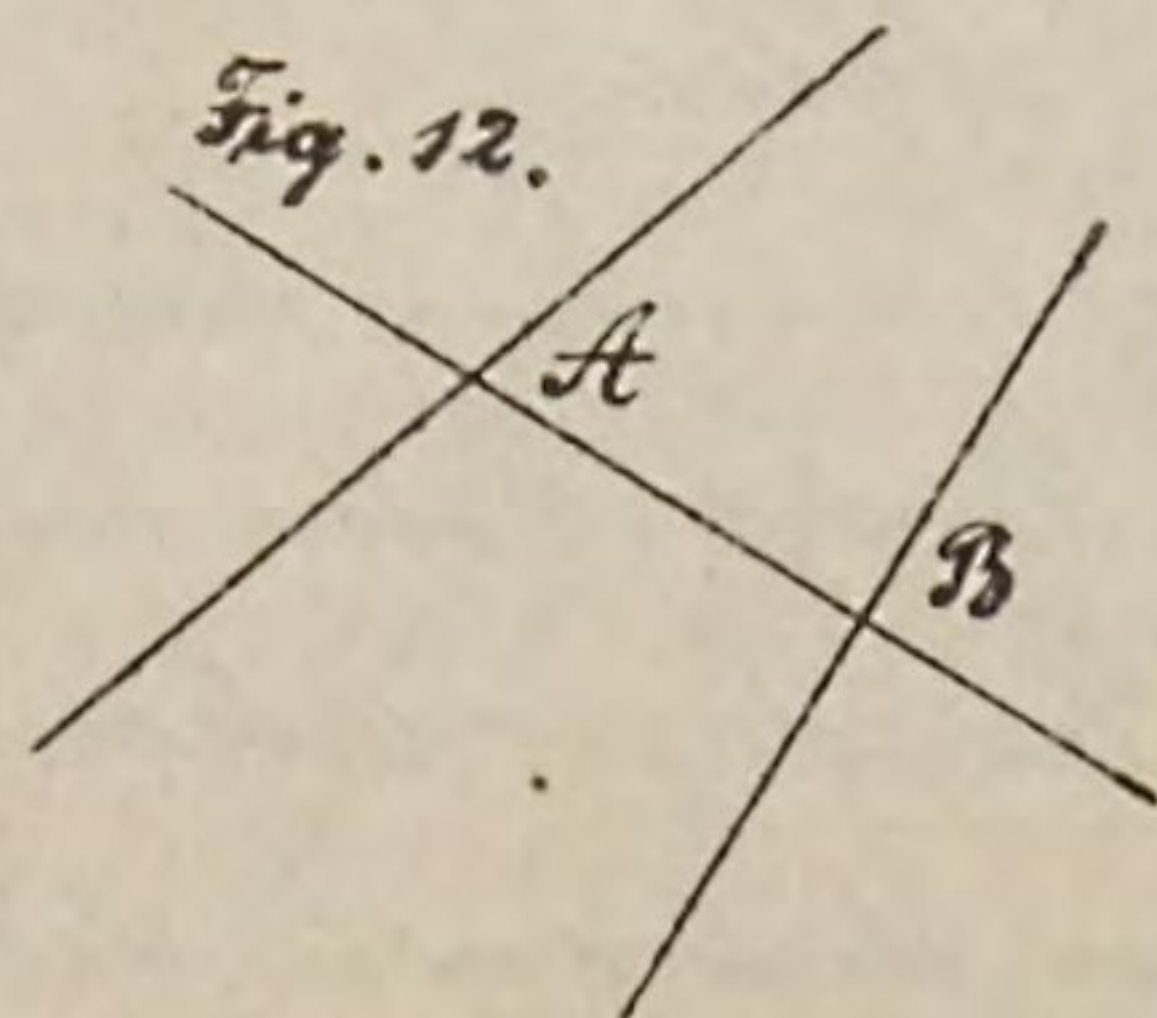


Fig. 12.

Ziehen wir eine beliebige, die in ihren einzelnen Punkten festen Geraden schneidende, dritte Gerade, so wird diese als solche festbleiben, da ihre Schnittpunkte A u. B ,

*) auch wohl gewöhnliche Reliefperspektive genannt.

„die Stützpunkte“, absolut fest sind, wohl aber im übrigen eine Verschiebung ihrer Punkte erleiden können.

Geometrisch bedeutet diese Collineation daher eine sogenannte windschiefe Perspektive, bei welcher der Bildpunkt eines beliebigen Punktes mit dem gegebenen Punkte immer auf einer & festen Gerade treffenden geraden Linie liegt.“

Sprechen wir jetzt von den Collineationen, die eine Fläche 2^{ten} Grades in sich selber überführen.

Es sei gegeben die allgemeine Fläche 2^{ten} Grades:
 $\sum a_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta = 0$. Die Frage, durch wie viel Collineationen diese Fläche in sich selber übergeführt werden kann, erledigt sich leicht durch eine einfache Abzählung. Es giebt allgemein ∞^{15} Collineationen im Raume von 3 Dimensionen. Denn in den eine Collineation bestimmenden Gleichungen haben wir 16 Constante, deren Verhältnisse jedoch nur wesentlich sind.

Flächen 2^{ten} Grades giebt es aber nur ∞^9 . Da nun durch jede Collineation aus einer Fläche 2^{ten} Grades wieder eine solche entsteht, auch jede Fläche, wie wir früher sahen, in jede

andere durch Collineation übergehen kann, so können wir sofort schließen, dass dieser Abzählung zufolge jede allgemeine Fläche 2^{ten} Grades durch $\frac{\infty^{15}}{\infty^9} = \infty^6$ fach verschiedene Collineationen in sich übergeführt wird.

Dies können wir noch auf eine andere Weise bestätigen. Wir wissen, dass wir auf 6 fach ∞ viele Weise eine gegebene Fläche 2^{ten} Grades auf ein Polartetraeder mit der Gleichung $\Sigma x_i^2 = 0$ beziehen können. Jede Collineation nun, die das zu Grunde gelegte Polartetraeder in ein anderes (zu dem dieselbe Gleichungsform gehört) überführt, wird auch die gegebene Fläche in sich überführen. Dieses ist aber auf ∞^6 fache Weise möglich.

Diese sechsfach unendlich vielen Collineationen zerfallen jedoch in zwei Arten, in 6 fach ∞ viele Collineationen der ersten Art und in 6 fach ∞ viele Collineationen der zweiten Art.

Folgendermaassen:

Die erste Schaar von Transformationen führt das einzelne erzeugende System der Fläche 2^{ten} Grades in sich selbst über, die zweite Art von Transformationen vertauscht die beiden Systeme von Erzeugenden miteinander."

Man unterscheidet diese beiden Arten von Collineationen auch wohl als die eigentliche und die uneigentliche Transformation. Hiernach bilden alsdann die eigentlichen Transformationen eine Gruppe, die uneigentlichen nicht, d. h. 2 eigentliche Transformationen nacheinander angewandt geben wieder eine eigentliche Transformation, nicht aber 2 uneigentliche. Dies aber ist gerade mit der Bezeichnung „Gruppe“ gemeint. Nun wollen wir gleich einen Ausblick auf die Nicht-Euklidische Geometrie werfen. Dort werden wir in Cayley'scher Weise eine Fläche 2^{ten} Grades zu Grunde legen. „Die eigentlichen Transformationen werden dann die Bewegungen des Nicht-Euklidischen Raumes sein, die uneigentlichen dagegen werden solche sein, die die Raumfiguren in ihre Spiegelbilder *) überführen.“

Die beiden Arten der Collineationen wollen wir jedoch noch etwas näher betrachten.

1.) Die eigentliche Collineation. Wir werden hier eine fundamentale Schlussweise anwenden, die wir auch im vorigen Semester bereits benutzten, als es sich darum handelte, einen Kegelschnitt in sich selbst überzuführen. Die Erzeugenden der bei

*) Eine Raumfigur ist mit ihrem Spiegelbilde nicht kongruent, da rechts u. links bei beiden Figuren vertauscht ist.

den Arten seien entsprechend durch die Parameter, werthe λ und μ festgelegt. Bei der eigentlichen Collineation geht jede Erzeugende λ in eine Erzeugende λ' [der ersten Art], und eine Erzeugende μ in eine Erzeugende μ' [der zweiten Art] über.

Wie hängt nun λ' mit λ und μ' mit μ zusammen? Sie hängen zunächst sicher algebraisch zusammen; denn die Punktcoordinaten erfahren eine algebraische Transformation, und die λ und μ sind andererseits algebraische Funktionen der λ . Aber sie hängen auch eindeutig zusammen; denn aus jeder Erzeugenden λ wird nur eine Erzeugende λ' und entspr. aus jedem μ nur eine μ' und umgekehrt. Die einzige eindeutige und eindeutig umkehrbare algebraische Funktion einer Variablen ist aber die gebrochene Funktion ersten Grades mit nicht verschwindender Determinante. Es folgt daher:

$$\lambda' = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta} \quad \text{und} \quad \mu' = \frac{a\mu + b}{c\mu + d}, \quad \text{wobei noch} \\ \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0 \quad \text{und} \quad ad - bc \neq 0 \text{ ist.}$$

Jede eigentliche Collineation bewirkt demnach eine Verschiebung der Erzeugenden der Fläche über die Fläche hin, welche durch Formeln der folgenden Art gegeben ist:

$$\lambda' = \frac{a\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta} ; \quad \mu' = \frac{a\mu + b}{c\mu + d} ,$$

wo $a\delta - \beta\gamma \geq 0$ *) und $ad - bc \geq 0$.

In den Formeln kommen je drei wesentliche Constante **) vor; wir haben aber ∞^6 Collineationen; unsere 2.3 Constante sind daher keiner Bedingungsgleichung unterworfen. Da wir im algebraischen Gebiete uns bewegen, so wird auch in der That jedes Werthesystem von Coefficienten unter Berücksichtigung der angeführten Bedingungen möglich sein.

Umgekehrt wird daher auch jede lineare Substitution von $\lambda : \lambda' = \frac{a\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta}$, wobei $a\delta - \beta\gamma \geq 0$ ist, verbunden mit einer linearen Substitution von $\mu : \mu' = \frac{a\mu + b}{c\mu + d}$; wobei $ad - bc \geq 0$ ist, eine eigentliche Collineation der Fläche zweiten Grades in sich nach sich ziehen.

Wir können nun auch homogen schreiben:

*) Entspricht dies unserer Annahme, die lineare Substitution der x mit verschwindender Determinante ausschließt.

**) Denn nur das Verhältniß der 4 Coefficienten ist maßgebend. Wir wollen übrigens bemerken, daß wir die Mannigfaltigkeit einer complexen Variablen eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit nennen.

(Bei unendl. d. p. f. m. d. e. d. w. h. m. n. Koll. ist uny. Koll. !)

$$\begin{aligned} \xi \cdot \lambda'_1 &= \alpha \lambda_1 + \beta \lambda_2 & \text{und} & \quad \zeta \cdot \mu'_1 = a \mu_1 + b \mu_2 \\ \xi \cdot \lambda'_2 &= \gamma \lambda_1 + \delta \lambda_2 & & \quad \zeta \cdot \mu'_2 = c \mu_1 + d \mu_2 \end{aligned}$$

Die quaternären linearen Substitutionen der bezeichneten Art erscheinen so in 2 Arten binärer linearer Substitutionen gespalten.

In Betreff dieser binären linearen Substitution wollen wir nun wieder die Frage aufwerfen: Gibt es festbleibende Elemente? Die Antwort hängt offenbar von den Determinanten ab:

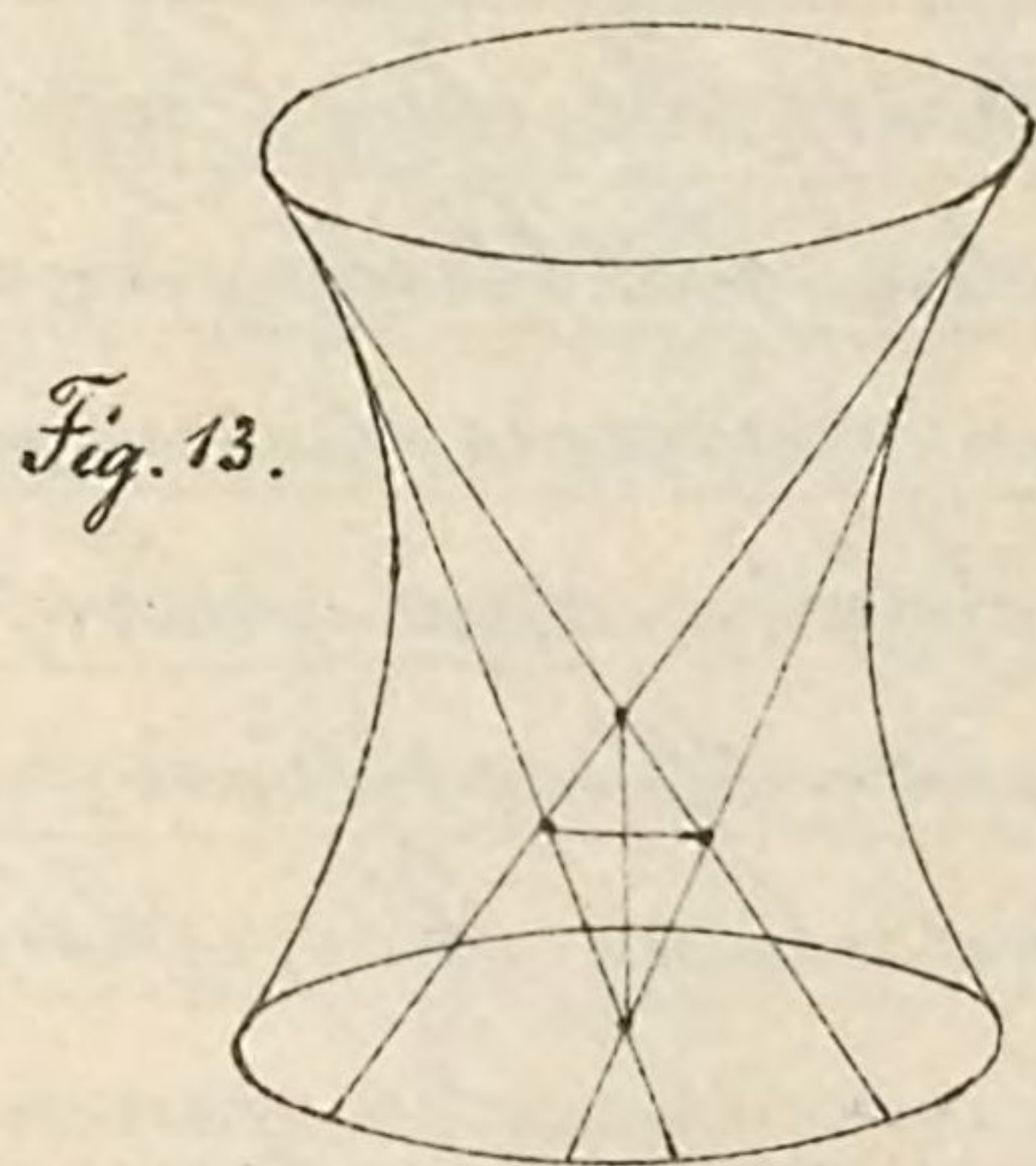
$$\begin{vmatrix} \alpha - \xi & \beta \\ \gamma & \delta - \xi \end{vmatrix} = 0 \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} a - \zeta & b \\ c & d - \zeta \end{vmatrix} = 0$$

welche nach Weierstraß zu classificieren sein werden. Wir wollen hier nur 2 Fälle zur Sprache bringen.

1. Die Determinanten mögen je 2 getrennte Wurzeln haben: ξ_1 und ξ_2 — ζ_1 und ζ_2 . Dies besagt, daß je zwei Erzeugende der einen und der anderen Art festbleiben. Diese 4 Erzeugenden bilden ein windschiefes Viereck, dessen Ecken alsdann gleichfalls festbleiben. [In der Figur ist als F_2 ein einschelliges Hyperboloid gewählt]. Es ist dies der „allgemeine Fall“. Verbindet man die gegenüberliegenden Ecken des Vierecks mit einander, so erkennt man leicht:

„Im allgemeinen Falle, wenn unsere beiden binären Substitutionen jede 2 festbleibende El.“

mente liefert, ist das räumliche Tetraeder, welches bei der betreffenden Collineation festbleiben muß, dasjenige Tangentialtetraeder unserer Fläche 2^{ten} Grades, welches durch dieses Vierseit festgelegt ist."



2.) Nun wollen wir noch einen sehr einfachen speciellen Fall betrachten. Es sei: $u' = u$, d. h. die Erzeugenden der zweiten Art werden gar nicht geändert, *) so daß nur die Erzeugenden der ersten Art auf der Fläche verschoben

werden. Wir wollen eine solche Operation eine Schiebung erster Art nennen, entsprechendes gilt für die Schiebung zweiter Art; dies ist diejenige Operation, bei der nur u substituiert wird, & dagegen festbleibt.

Wir erkennen sofort:

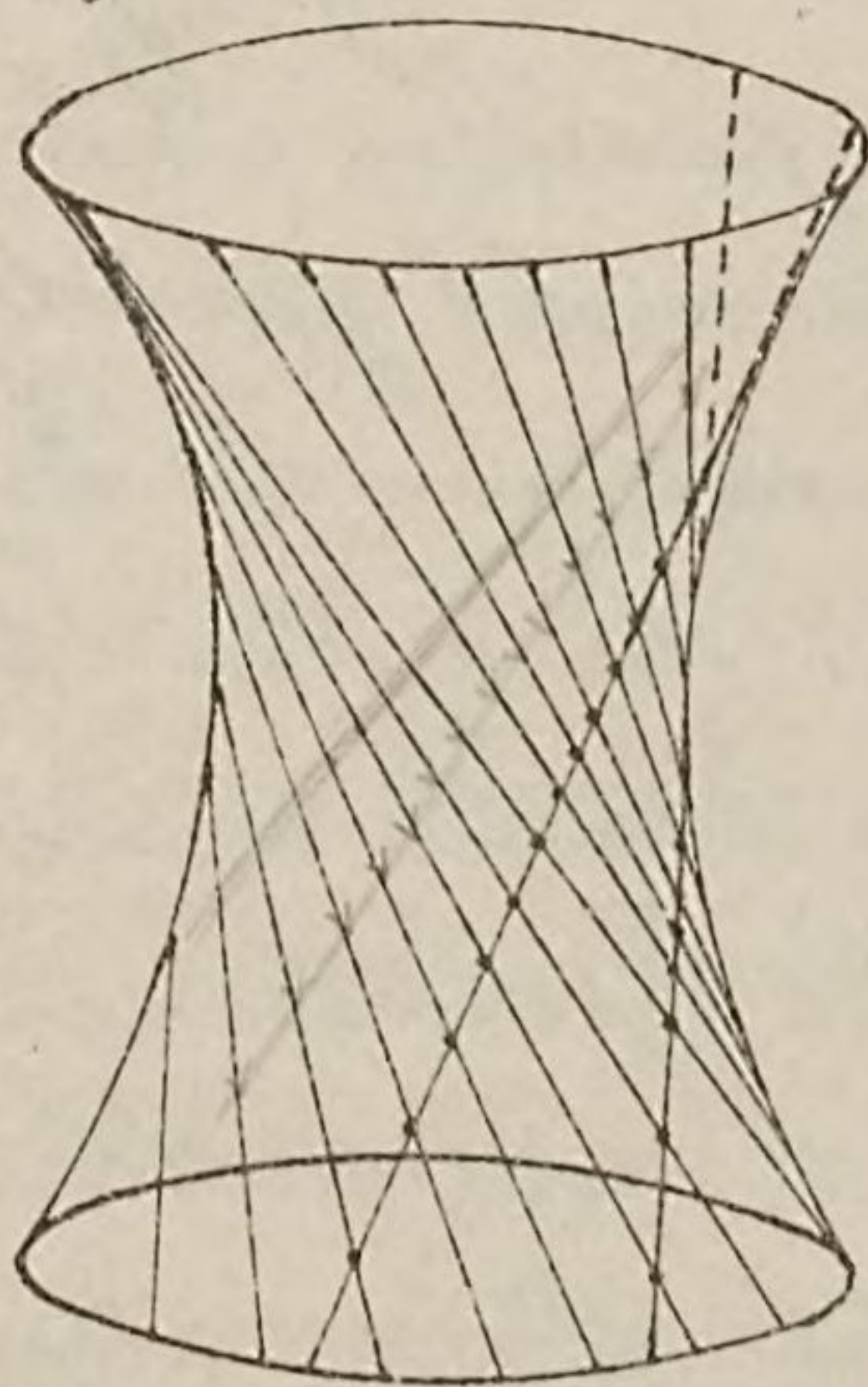
„Jede eigentliche Collineation der Flächen 2^{ten} Grades in sich kann als die Aufeinanderfolge zweier solcher Schiebungen angesehen werden.“

*) cf. pag. 104.

Was stellt nun eine solche Schiebung für eine Raumtransformation vor?

Bei einer Schiebung erster Art z. B. bleiben nicht nur alle Erzeugenden zweiter Art fest, sondern auch 2 Erzeugende der ersten Art, die wir als getrennt denken wollen, und es ist dann klar, daß alle einzelnen Punkte dieser beiden Erzeugenden festbleiben müs-

Fig. 14.



sen, woraus dann weiter folgt, daß unsere Raumcollineation eine windschiefe Perspektive ist, welche die genannten 2 Erzeugenden zu Leitlinien hat."

Analoges gilt auch von den Schiebungen zweiter Art. Dort sind zwei Erzeugende zweiter Art mit ihren sämtlichen Punkten fest und Leitlinien einer windschiefen Perspektive. Wir schließen weiter:

"Umgekehrt wird auch jede windschiefe Perspektive, deren Leitlinien einer Fläche 2^{ten} Grades angehören,

*) Die Determinante $\begin{vmatrix} a-\epsilon & b \\ c & d-\epsilon \end{vmatrix}$ hat dann die Doppelwurzel $\epsilon=1$, für welche alle 2-gliedrigen Unterdeterminanten der selben verschwinden.

eine Schiebung für diese Fläche zweiten Grades vorstel-
len, d. h. die Fläche wird in sich übergehen, indem
sich nur die Linien der einen Erzeugenden unter
einander vertauschen, alle Linien der anderen
Erzeugung aber erhalten bleiben, d. h. sich in
sich selbst verschieben."

Wir gehen nun über zu den
 2.) uneigentlichen Transformationen. Wir wollen
 hier nur 2 Thatsachen angeben:

"Jede uneigentliche Collineation schreibt sich
in der λ und μ :

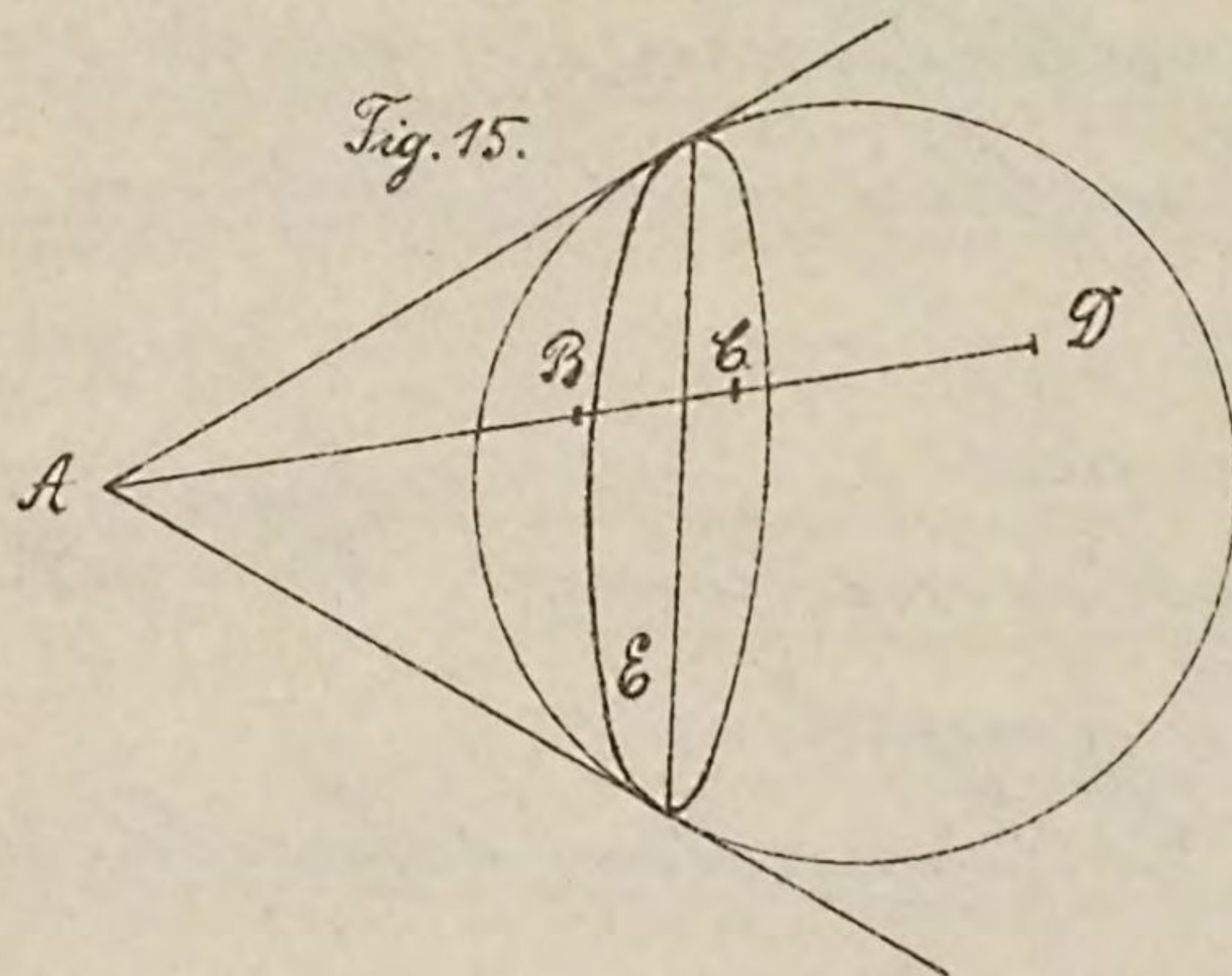
$$\lambda' = \frac{a\mu + b}{c\mu + d}; \mu' = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta}, \text{ wo wieder}$$

$ad - bc \neq 0$. und umgekehrt bedeutet jede solche
 $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Formelgruppe eine uneigentliche
Collineation der Fläche 2^{ten} Grades in sich selbst."

Diese zweite Bemerkung ist die:
"Ein specieller Fall einer uneigentlichen Collinea-
tion ist die Centralperspektive an Pol und Polar,
ebene, die wir gewöhnlich schlechtweg als Spiege-
lung bezeichnen."

"Bei einer solchen Centralperspektive verschiebt
sich ein jeder durch den Pol A laufende Strahl
in der Art in sich selbst, daß jeder Punkt B
eines solchen Strahles durch den anderen D

ersetzt wird, der mit ihm zum Schnitt $\mathcal{C}$ mit der Polarebene $\mathcal{C}$ und zum Pol selbst harmonisch ist.



Wir wollen einmal ein Polartetraeder einführen, dessen erste Ecke A ist. Dann lautet die Gleichung der F_2 :

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0.$$

Die Centralperspektive, welche die Fläche in sich selbst überführt, ist dann gegeben durch:

$$x_1' = -x_1.$$

$$x_2' = x_2.$$

$$x_3' = x_3.$$

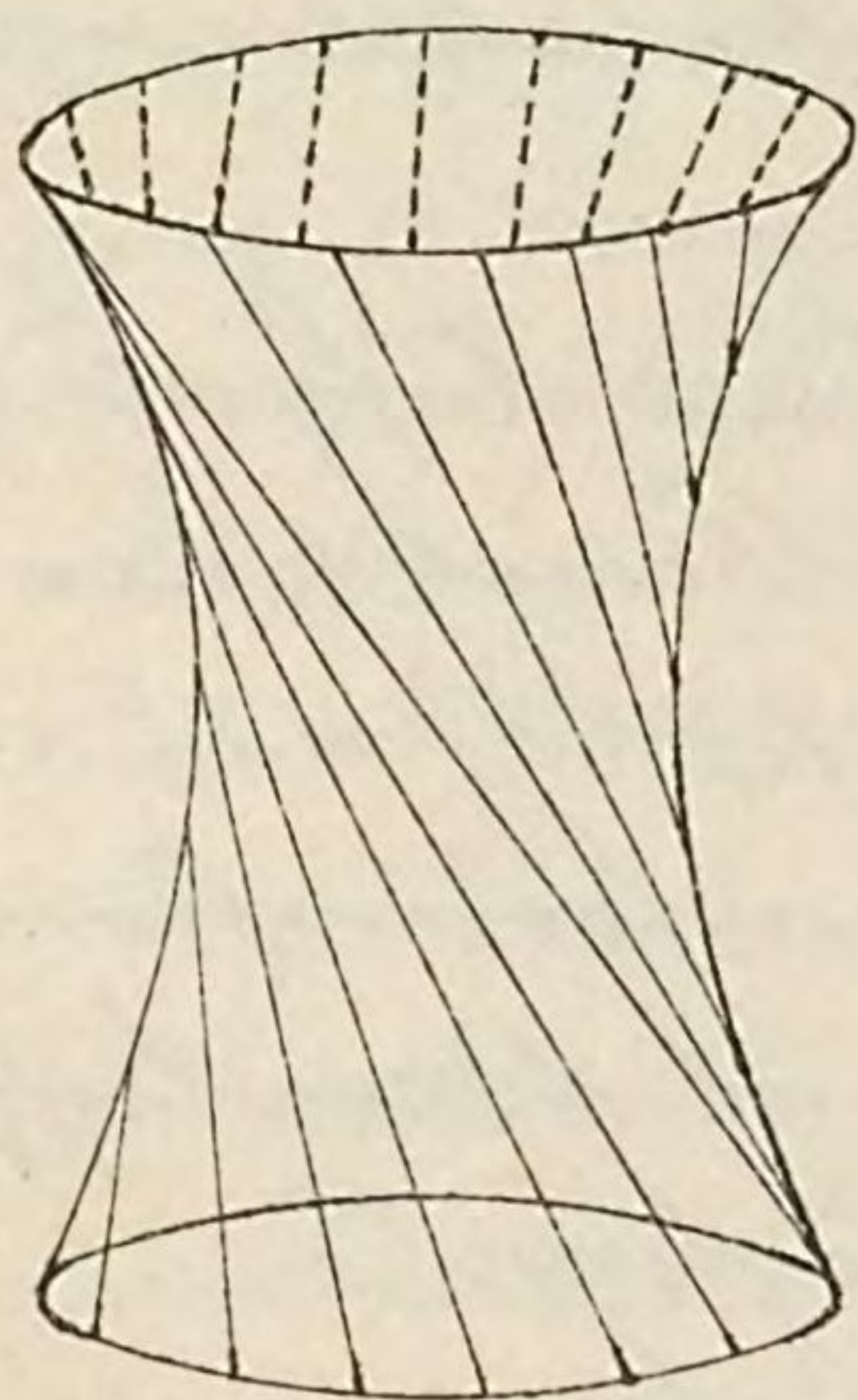
$$x_4' = x_4.$$

sodass also nur eine Coordinat im Vorzeichen geändert wird. Das Wort „Spiegelung“ bezieht sich aber wieder auf die nicht-Euklidische Geometrie. Es ist dies in der That für die auf die F_2 zu gründende Cayley'sche Maßbestimmung der analoge Process, wie die gewöhnliche Spiegelung in der Euklidischen Geometrie.

„Dass eine solche Spiegelung aber eine ungentliche Collineation ist, bei der sich die beiden

Arten der Erzeugenden vertauschen, sieht man am einschaligen Hyperboloid, sobald man als Pol das eigene Auge wählt, so daß die uns zugekehrte Seite des Hyperboloids mit der uns abgekehrten bei der Centralprojektion vertauscht wird."

Fig. 16.



Dies läßt sich natürlich auch analytisch bestätigen. Schließlich wollen wir noch anführen:

"Verbindet man eine beliebige uneigentliche Collineation mit einer solchen Spiegelung, so bekommt man eine eigentliche Collineation. Die uneigentliche Collineation kann also als

eine Combination einer eigentlichen und einer Spiegelung angesehen werden."

Hiermit wollen wir die allgemeine algebraische Theorie der Collineation abschließen und uns zur Betrachtung der Realitätsverhältnisse wenden, indem wir die drei Typen der allgemeinen Flächen 2^{ten} Grades gesondert behandeln. Wir beginnen mit den nulltheiligen Flächen.

Nulltheilige Flächen insbesondere.

Die Fläche sei, auf ein reelles Polartetraeder bezogen, auf die Form gebracht: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$.

Wir wollen nun die Substitutionen:

$$x'_1 = \sum c_{1\beta} x_\beta; \quad x'_2 = \sum c_{2\beta} x_\beta;$$

$$x'_3 = \sum c_{3\beta} x_\beta; \quad x'_4 = \sum c_{4\beta} x_\beta \text{ bestimmen,}$$

welche die Fläche in sich selber überführen. Die resultierende Gleichung muß daher wieder die Form erhalten:

$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2 = 0$. Diese Aufgabe geht parallel mit der rein formentheoretischen Aufgabe, die quaternäre Form $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ in sich selbst durch lineare Transformationen zu transformieren. Man nennt diese Aufgabe eine „orthogonale Substitution“.

Alle Collineationen zu bestimmen, welche eine nulltheilige Fläche in sich überführen, ist daher im wesentlichen dieselbe Aufgabe wie die Aufgabe der orthogonalen Substitution bei 4 Veränderlichen.

Man unterscheidet nun in den Lehrbüchern 2 Classen orthogonaler Substitutionen, je nach, dem die Determinante der Coefficienten $|c_{\alpha\beta}| = +1$ oder -1 ist, (die orthogonale Substitu.

sion erster und zweiter Art.). Wir wollen historisch bemerken, dass insbesondere die orthogonalen Substitutionen mit der Determinante +1 den eigentlichen Collineationen, die mit der Determinante -1 den uneigentlichen Collineationen entsprechen.

Ueber das Problem der orthogonalen Substitution ist nun eine weitschichtige Litteratur vorhanden. Wir wollen hiervon nur Einiges berichten. Haben wir n Variable, so treten in den homogenen linearen Substitutionsgleichungen n^2 Coefficienten auf. Substituieren wir nun die so erhaltenen x' in den Ausdruck $\sum_{k=1}^n x_k'^2$, so ergeben sich, da die resultierende Form die Gestalt $\sum_{k=1}^n x_k^2$ haben soll, $\frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2}$ Gleichungen aus dem Verschwinden der Coefficienten der Glieder $x_l x_m$ für l, m und n Gleichungen aus der Forderung, dass die Coefficienten der quadratischen Glieder gleich eins sein sollen.

Wie leicht zu sehen, sind also von den n^2 Constanten der Substitution nur

$n^2 - \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$ von einander unabhängig.

Wir müssen nun vor allen Dingen die Arbeit von Cayley erwähnen, Crelle 32 (1846): sur quelques Propriétés des Déterminants gauches." (Diese Abhand.

lung findet sich auch wieder abgedruckt in Cayley's Werken Bd. 1 (N^o. 52).

Cayley löst dort die schon von Euler gestellte Aufgabe, die Coefficienten $C_{\alpha\beta}$ einer orthogonalen Substitution erster Art als rationale Funktionen von unabhängigen $\frac{n(n-1)}{2}$ Größen wirklich hinzuschreiben.

Wir wollen diese Lösung hier wiedergeben. Cayley sagt, wir setzen: $2Z_{\alpha} = X_{\alpha} + X'_{\alpha}$, d. h. die Z_{α} seien die arithmetischen Mittel der X_{α} und X'_{α} . Sind diese Z_{α} nun von einander linear unabhängig? Um dies zu entscheiden, setzen wir für die X'_{α} ihren Werth $\sum_{\beta} C_{\alpha\beta} X_{\beta}$ und stellen die Determinante der Coefficienten der X_{α} auf. Diese lautet:

$$\begin{vmatrix} C_{11} + 1 & C_{12} & C_{13} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} + 1 & C_{23} & \dots & C_{2n} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} + 1 & \dots & C_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & C_{n3} & \dots & C_{nn} + 1 \end{vmatrix}$$

Man findet nun, im Falle der orthogonalen Substitution erster Art ist diese Determinante $\neq 0$; im Falle der Substitution zweiter Art dagegen hat sie den Werth 0. Hieraus folgt: Die Z_{α} sind linear unabhängige Funktionen der

x_α im Falle der orthogonalen Substitution erster Art, im anderen Falle sind sie linear abhängig und die ganze folgende Entwicklung kommt darum nicht in Betracht.

Es wird nun weiter:

$$\sum x'_\alpha{}^2 = 4 \sum z_\alpha{}^2 - 4 \sum z_\alpha x_\alpha + \sum x_\alpha{}^2. \text{ Da nun}$$

$$\sum x'_\alpha{}^2 = \sum x_\alpha{}^2 \text{ werden soll, so muß}$$

die Beziehung gelten:

$\sum z_\alpha{}^2 = \sum z_\alpha x_\alpha$. Wir werden jetzt die x_α durch die z_α linear ausdrücken; es ist dies eben bei den Substitutionen erster Art aus dem angegebenen Grunde stets möglich. Wir werden etwa erhalten:

$$x_1 = \lambda_{11} z_1 + \lambda_{12} z_2 + \lambda_{13} z_3 + \dots$$

$$x_2 = \lambda_{21} z_1 + \lambda_{22} z_2 + \lambda_{23} z_3 + \dots$$

Wir können nun leicht die Bedingungen aufstellen, die in Rücksicht auf die Beziehung $\sum z_\alpha{}^2 = \sum z_\alpha x_\alpha$ zwischen den Coefficienten λ bestehen müssen. Es muß sein:

$\lambda_{\alpha\alpha} = 1, \lambda_{\alpha\beta} = -\lambda_{\beta\alpha}$. Man kann demnach die $\lambda_{\alpha\beta}$ beliebig wählen, wenn man nur den $\lambda_{\beta\alpha}$ alsdann den negativen Werth der $\lambda_{\alpha\beta}$ zuertheilt. Zusammenfassend sagen wir:

„Um die allgemeinste orthogonale Substitution erster Art zu finden, setze man $x_\alpha = \sum \lambda_{\alpha\beta} z_\beta$ mit

der Bedingung, daß alle $\lambda_{aa} = 1$ und $\lambda_{\alpha\beta} = -\lambda_{\beta\alpha}$ sein soll. *)

Dann hat man X'_α nur noch gleich $2\tilde{z}_\alpha - X_\alpha$ zu setzen und, will man direkt die X'_α durch die X_α ausdrücken, die $\tilde{z}_\alpha$ aus den Gleichungssystemen zu eliminieren. "

Wir wollen, um die Formeln ganz zu übersehen, für den Fall $n = 4$ dieselben einmal vollständig hinschreiben. Wir setzen:

$$\begin{aligned} X_1 &= \tilde{z}_1 + \underline{\lambda_{12} \tilde{z}_2} + \underline{\lambda_{13} \tilde{z}_3} + \underline{\lambda_{14} \tilde{z}_4} \\ X_2 &= \underline{\lambda_{21} \tilde{z}_1} + \tilde{z}_2 + \underline{\lambda_{23} \tilde{z}_3} + \underline{\lambda_{24} \tilde{z}_4} \\ X_3 &= \underline{\lambda_{31} \tilde{z}_1} + \underline{\lambda_{32} \tilde{z}_2} + \tilde{z}_3 + \underline{\lambda_{34} \tilde{z}_4} \\ X_4 &= \underline{\lambda_{41} \tilde{z}_1} + \underline{\lambda_{42} \tilde{z}_2} + \underline{\lambda_{43} \tilde{z}_3} + \tilde{z}_4. \end{aligned}$$

Wir wählen als unabhängige Coefficienten die folgenden: $\lambda_{12}, \lambda_{13}, \lambda_{14}, \lambda_{34}, \lambda_{42}, \lambda_{23}$, die in den Gleichungen unterstrichen sind, während die eingeklammerten Größen den entsprechenden unterstrichenen entgegengesetzt gleich seien. Dann finden wir für die $X'_\alpha = 2\tilde{z}_\alpha - X_\alpha$ die Gleichungen:

$$\begin{aligned} X'_1 &= \tilde{z}_1 + \underline{\lambda_{21} \tilde{z}_2} + \underline{\lambda_{31} \tilde{z}_3} + \underline{\lambda_{41} \tilde{z}_4} \\ X'_2 &= \underline{\lambda_{12} \tilde{z}_1} + \tilde{z}_2 + \underline{\lambda_{32} \tilde{z}_3} + \underline{\lambda_{42} \tilde{z}_4} \\ X'_3 &= \underline{\lambda_{13} \tilde{z}_1} + \underline{\lambda_{23} \tilde{z}_2} + \tilde{z}_3 + \underline{\lambda_{43} \tilde{z}_4} \\ X'_4 &= \underline{\lambda_{14} \tilde{z}_1} + \underline{\lambda_{24} \tilde{z}_2} + \underline{\lambda_{34} \tilde{z}_3} + \tilde{z}_4 \end{aligned}$$

*) Man nennt eine solche Substitution wohl „antisymmetrisch.“

und wenn wir die orthogonale Substitution haben wollen, d. h. wissen wollen, wie die X' sich durch die X ausdrücken, so müssen wir die Z aus diesen beiden Gleichungssystemen eliminieren. Wir führen nun die Bezeichnung „schiefe Substitution“ ein für diejenige Substitution, bei der die zur Diagonale symmetrischen Coefficienten entgegengesetzt gleich, die Coefficienten der Diagonalglieder dagegen einander gleich, bezw. gleich 1 sind.

Unser Resultat lautet dann in Worten:

„Man erhält die allgemeinste orthogonale Substitution erster Art, indem man die X und X' aus den Hilfsgrößen Z je durch eine schiefe Substitution zusammensetzt, von denen die eine die transponierte *) der anderen ist, und dann die Hilfsgrößen Z eliminiert.“

Dies ist die ursprüngliche Cayley'sche Theorie, welche an die Zahl der Variablen gar nicht geknüpft ist. Für den Fall $n = 4$, den wir speciell durchgeführt haben, ergibt sich nun noch eine andere Darstellung der orthogonalen Substitution und zwar auf geometrischer Basis beruhend, indem wir auf die Operationen der Schiebungen bei den Flächen 2^{ten} Grades zurückgehen.

*) vgl. Wintervorlesung.

„Bei $n = 4$ müssen sich nämlich die hier erhaltenen Formeln mit 6 willkürlichen Coefficienten in die Stufenanfolge zweier kleinerer Formeln spalten lassen, von denen jede nur 3 willkürliche Constanten enthält, dem Umstande entsprechend, daß sich die allgemeine Collineation erster Art der Flächen 2^{ten} Grades in sich selbst durch die Stufenanfolge zweier Schiebungen erzielen läßt.“ (vgl. pag. 183).

Wir werden so zu Formeln gelangen, die Cayley gleichfalls gefunden hat, ohne daß er an-
gibt, auf welchem Wege er dazu gekommen ist. Die in Betracht kommende Abhandlung von Cayley findet sich Crelle Bd 50 (1855); sie ist wieder abgedruckt in Bd. II seiner Werke 437.
„Recherches Ulterieures sur les Determinants gauches.“

Wir wollen diese Formeln jetzt auf unserem Wege ableiten. Unsere nächsten Entwicklungen werden sich übrigens allgemein auf Flächen 2^{ten} Grades beziehen, nicht nur auf nulltheilige Flächen. Wir gehen von der Gleichung der Fläche zweiten Grades, der ein Polartetraeder zu Grunde liegt: $X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 = 0$ zu der auf ein Tangentialtetraeder bezogenen Gleichungsform über, indem wir setzen:

$y_1 = x_1 + ix_3$; $y_2 = x_2 + ix_4$
 $y_3 = x_1 - ix_3$; $y_4 = x_2 - ix_4$. Wir erhalten
 die Gleichung: $y_1 y_3 + y_2 y_4 = 0$.

Wir werden zur Durchführung der Rechnung weiterhin auch die inversen Operationen gebrauchen, welche die x durch die y ausdrücken:

$$2x_1 = y_1 + y_3 \quad ; \quad 2x_3 = i(-y_1 + y_3).$$

$$2x_2 = y_2 + y_4 \quad ; \quad 2x_4 = i(-y_2 + y_4).$$

Gestützt auf die Gleichung: $y_1 y_3 + y_2 y_4 = 0$.

führen wir nun die Parameter λ und μ der Erzeugenden erster und zweiter Art ein und zwar sogleich in homogener Form: $(\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \mu = \frac{\mu_1}{\mu_2})$.

Die Erzeugenden erster und zweiter Art sind dann gegeben durch die Gleichungspaare:

$$\begin{aligned}
 1.) \quad & \begin{cases} \lambda_1 y_2 - \lambda_2 y_1 = 0. \\ \lambda_1 y_3 + \lambda_2 y_4 = 0. \end{cases} \quad \text{und} \quad 2.) \quad \begin{cases} \mu_1 y_4 - \mu_2 y_1 = 0. \\ \mu_1 y_3 + \mu_2 y_2 = 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Der neue Gedanke, den wir bislang noch nicht gefaßt hatten, besteht dann darin, daß wir die Coordinaten eines Flächenpunktes durch λ und μ ausdrücken, wir können dies, da durch jeden Punkt der Fläche eine Erzeugende λ und eine Erzeugende μ hindurchgeht, mit anderen Worten, wir lösen die 4 Gleichungen nach den y_α auf, indem wir die λ und μ als bekannt

ansetzen. Wir erhalten:

$$\xi y_1 = \lambda_1 \mu_1.$$

$$\xi y_2 = \lambda_2 \mu_1.$$

$$\xi y_3 = -\lambda_2 \mu_2.$$

$$\xi y_4 = \lambda_1 \mu_2.$$

Wir führen nun eine Schiebung erster Art und zugleich eine Schiebung zweiter Art aus, dieselben sind charakterisiert durch eine lineare Substitution der λ resp. der μ mit nicht verschwindender Determinante.

Wir setzen also:

$$\lambda'_1 = \alpha \lambda_1 + \beta \lambda_2.$$

$$\lambda'_2 = \gamma \lambda_1 + \delta \lambda_2; \text{ wo } \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0 \text{ sei, und:}$$

$$\mu'_1 = a \mu_1 + b \mu_2.$$

$$\mu'_2 = c \mu_1 + d \mu_2; \text{ wo } ad - bc \neq 0 \text{ sei.}$$

Bei diesen Operationen werden die Punkte y in Punkte y' übergehen. Es wird also dann:

$$\xi' y'_1 = \lambda'_1 \mu'_1 = (\alpha \lambda_1 + \beta \lambda_2)(a \mu_1 + b \mu_2) = (\alpha a y_1 + \beta a y_2 - \beta b y_3 + \alpha b y_4) \cdot \xi.$$

$$\xi' y'_2 = \lambda'_2 \mu'_1 = (\gamma \lambda_1 + \delta \lambda_2)(a \mu_1 + b \mu_2) = (\gamma a y_1 + \delta a y_2 - \delta b y_3 + \gamma b y_4) \cdot \xi.$$

$$\xi' y'_3 = \lambda'_2 \mu'_2 = (\gamma \lambda_1 + \delta \lambda_2)(c \mu_1 + d \mu_2) = (\gamma c y_1 + \delta c y_2 - \delta d y_3 + \gamma d y_4) \cdot \xi.$$

$$\xi' y'_4 = \lambda'_1 \mu'_2 = (\alpha \lambda_1 + \beta \lambda_2)(c \mu_1 + d \mu_2) = (\alpha c y_1 + \beta c y_2 - \beta d y_3 + \alpha d y_4) \cdot \xi.$$

Damit haben wir dann in der That die quaternäre Collineation gefunden, welche den binären Substitutionen der λ, μ entspricht.

Wollen wir insbesondere eine quaternäre Substitution mit der Determinante 1 haben, so werden wir nur jede der zuletzt hingeschriebenen Gleichungen durch die vierte Wurzel aus der Coefficienten-Determinante beiderseits zu dividieren haben. Es zeigt sich nun, daß letztere gleich $(\alpha\delta - \beta\gamma)^2(ad - bc)^2$ ist. Wir erhalten also nach Ausführung der angegebenen Operation, indem wir zugleich links den Proportionalitätsfaktor fortlassen:

$$y'_1 = \frac{(\alpha ay_1 + \beta ay_2 - \beta by_3 + d by_4)}{\sqrt{(\alpha\delta - \beta\gamma)(ad - bc)}}; \text{ analog lauten}$$

die Gleichungen für y'_2, y'_3, y'_4 . Wir begleiten dies mit den Worten:

„Insbesondere bekommen wir eine quaternäre lineare Substitution von der Determinante +1, indem wir jeden unserer 4-gliedrigen linearen Ausdrücke auf der letzten Seite durch $\sqrt{(\alpha\delta - \beta\gamma)(ad - bc)}$ dividieren.“

Wir wollen diese Formeln nun ausdrücklich hinschreiben für den Fall, daß wir nur eine Schiebung der ersten Art haben, daß die u also eine identische Substitution erleiden.

Es wird:

$$y'_1 = \frac{\alpha y_1 + \beta y_2}{\sqrt{\alpha\delta - \beta\gamma}}; \quad y'_3 = \frac{\delta y_3 - \gamma y_4}{\sqrt{\alpha\delta - \beta\gamma}}.$$

$$y'_2 = \frac{\gamma y_1 + \delta y_2}{\sqrt{(\alpha\delta - \beta\gamma)}} ; y'_4 = \frac{-\beta y_3 + \alpha y_4}{\sqrt{(\alpha\delta - \beta\gamma)}}.$$

Wir werden jetzt zu den Coordinaten x zurückgehen, indem wir die Substitutionsformeln auf pag. 115 anwenden. Die hierbei nöthig werdende Rechnung ist sehr einfach, wir geben sogleich das Resultat an:

$$2\sqrt{\alpha\delta - \beta\gamma} x'_1 = (\alpha + \delta)x_1 + (\beta - \gamma)x_2 + i(\alpha - \delta)x_3 + i(\beta + \gamma)x_4.$$

$$2\sqrt{\alpha\delta - \beta\gamma} x'_2 = (-\beta + \gamma)x_1 + (\alpha + \delta)x_2 + i(\beta + \gamma)x_3 + i(-\alpha + \delta)x_4.$$

$$2\sqrt{\alpha\delta - \beta\gamma} x'_3 = i(-\alpha + \delta)x_1 + i(-\beta - \gamma)x_2 + (\alpha + \delta)x_3 + (\beta - \gamma)x_4.$$

$$2\sqrt{\alpha\delta - \beta\gamma} x'_4 = i(-\beta - \gamma)x_1 + i(\alpha - \delta)x_2 + (-\beta + \gamma)x_3 + (\alpha + \delta)x_4.$$

Diese Substitutionsformeln für eine Schiebung erster Art enthalten noch die imaginäre Einheit i ; wir werden daher jetzt die $\alpha \beta \gamma \delta$ so in einen reellen und imaginären Theil zu spalten suchen, daß alles Imaginäre aus unseren Formeln herausfällt. Dies wird geleistet, wenn wir setzen:

$$\alpha = A + iC ; \beta = -B + iD.$$

$\delta = A - iC ; \gamma = +B + iD$. Die Substitution, welche λ erleidet, lautet dann:

$$\lambda' = \frac{(A + iC)\lambda - B + iD}{(B + iD)\lambda + A - iC}.$$

Wir können uns

nun fragen, worauf es beruht, daß die Coefficienten $\alpha \beta \gamma \delta$ diese merkwürdige Form haben. Wir werden

dies nachher noch näher ausführen, wenn wir die bei der Collineation festbleibenden Punkte berechnen. Wir werden finden, daß diese besondere Form $\lambda' = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta}$ bedingt, daß die beiden bei der Substitution festbleibenden Werthe von λ diametral imaginär sind, und umgekehrt durch die Forderung, daß sie es sein sollen, festgelegt wird.

„Es müssen nämlich in der That bei einer reellen Schiebung zwei konjugiert imaginäre Erzeugende festbleiben, und diesen korrespondieren, wie wir von früher her wissen, diametrale Parameterwerthe.“

Tragen wir nun für die $\alpha \beta \gamma \delta$ ihre Werthe in unsere Formeln ein, so kommt:

$$\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 + D^2} \cdot x'_1 = Ax_1 - Bx_2 - Cx_3 - Dx_4.$$

$$\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 + D^2} \cdot x'_2 = Bx_1 + Ax_2 - Dx_3 + Cx_4.$$

$$\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 + D^2} \cdot x'_3 = Cx_1 + Dx_2 + Ax_3 - Bx_4.$$

$$\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 + D^2} \cdot x'_4 = Dx_1 - Cx_2 + Bx_3 + Ax_4.$$

Dies sind also die Formeln, welche sich für unsere reellen Schiebungen erster Art ergeben.

Sie stellen eine schiefe Substitution von besonders einfachem Aufbau dar, indem in den Diagonalgliedern überall A steht, die zur Diagonale symmetrischen Coefficienten entgegengesetzt gleich sind, außerdem jedoch auf jeder Seite der Diagonale

je zwei der einzelnen Coefficienten gleich sind.

Für die Schiebungen zweiter Art bekommen wir die analogen Gleichungen:

$$\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2 + D'^2} \cdot x'_1 = A'x_1 - B'x_2 - C'x_3 - D'x_4.$$

$$\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2 + D'^2} \cdot x'_2 = B'x_1 + A'x_2 + D'x_3 - C'x_4.$$

$$\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2 + D'^2} \cdot x'_3 = C'x_1 - D'x_2 + A'x_3 + B'x_4.$$

$$\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2 + D'^2} \cdot x'_4 = D'x_1 + C'x_2 - B'x_3 + A'x_4.$$

„Die Schiebungen zweiter Art liefern daher Formeln welche sich von denen der ersten Art nur in 6 Vorzeichen unterscheiden.“

Wir werden dann die allgemeinste Substitution der verlangten Eigenschaft erhalten, wenn wir die Substitutionen einer Schiebung erster Art und einer Schiebung zweiter Art hinter einander anwenden.

Wie werden wir diese Formeln nun leicht im Gedächtniß behalten können? In dieser Hinsicht ist die Bemerkung Cayley's (l. c.) von Interesse, daß die Eigenschaft: die Summe der Quadrate der x ist bei diesen Substitutionen immer gleich der Summe der Quadrate der x' , sich in analoger Weise wie, der findet in der Theorie der Hamilton'schen Quaternionen.

Wir wollen dies kurz angeben:

Unter einer Quaternionen q versteht man eine viergliedrige komplexe Zahl:

$p = p_0 + ip_1 + jp_2 + kp_3$, wo i, j, k 3 komplexe Einheiten sind, für die specielle Rechnungsregeln zu definieren sein werden. Es sei eine zweite Zahl q gegeben:

$q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3$. Wenn man p u. q addiert oder subtrahiert, davon braucht man wohl kaum zu sprechen. Was die Multiplication von p und q angeht, so ist darüber zu sagen: man multipliciert p und q gerade so, als ob i, j, k unbestimmte Größen wären. Dann setzen wir:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$jk = i, ki = j, ij = k.$$

Dies sind die speciellen Multiplicationsregeln, die der Rechnung mit Quaternionen zu Grunde liegen. Nun ist:

$$j \cdot k^2 = i \cdot k$$

$$\frac{j \cdot k^2 = -j}{ik = -j}$$

Hierbei ist das Gesetz als gültig angenommen, daß $a \cdot (bc) = (ab) \cdot c$ ist.

So folgt aus obigen Rechenregeln, daß $j \cdot k = -i$, $ik = -j$, $ji = -k$ ist.

In Folge dieser Rechenregeln ist im Gebiete von Hamiltons Quaternionen die Multiplication keine commutative Operation, es ist keineswegs
 $p \cdot q = q \cdot p$.

Rechnen wir nun einmal $p \cdot q$ aus, so kommt:

$$\begin{aligned}
p \cdot q &= p_0 q_0 + i p_0 q_1 + j p_0 q_2 + k p_0 q_3 \\
&\quad - p_1 q_1 + i p_1 q_0 - j p_1 q_3 + k p_1 q_2 \\
&\quad - p_2 q_2 + i p_2 q_3 + j p_2 q_0 - k p_2 q_1 \\
&\quad - p_3 q_3 - i p_3 q_3 + j p_3 q_1 - k p_3 q_0 \text{ oder} \\
&= p_0 q_0 - p_1 q_1 - p_2 q_2 - p_3 q_3 \\
&\quad + i (p_0 q_1 + p_1 q_0 + p_2 p_3 - p_3 q_2) \\
&\quad + j (p_0 q_2 - p_1 q_3 + p_2 q_0 + p_3 q_1) \\
&\quad + k (p_0 q_3 + p_1 q_2 - p_2 q_1 - p_3 q_0). \text{ Das Produkt}
\end{aligned}$$

zweier Quaternionen ist daher eine dritte Quaternion geworden. Hätten wir $q \cdot p$ gebildet, so würden gewisse Vorzeichen im Endausdruck sich geändert haben.

Die Quaternionen finden ihre hauptsächlichste Anwendung in der Theorie der orthogonalen Substitutionen von 3 und 4 Veränderlichen; man kann sagen, daß gerade für diese der Quaternionen Calcul erfunden ist. Wir mögen uns insbesondere fragen:

Wie drücken sich nun unsere Substitutionen auf pag. 125 in der Quaternionensprache aus?

Es wird, wie man sich leicht überzeugt, gesetzt werden können, für die erste Formelgruppe

$$(x'_1 + ix'_2 + jx'_3 + kx'_4) = \frac{(A + iB + jC + kD)(x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 + D^2}}.$$

Diese eine sehr symmetrisch gebaute Formel er-

setzt vollständig die Substitutionsformeln für die Schiebungen erster Art. Was nun die abweichenden Zeichen für die Schiebungen zweiter Art angeht, so ergeben sich dieselben gerade dann, wenn wir dieselbe Formel mit vertauschter Reihenfolge der Faktoren schreiben:

$$(x'_1 + ix'_2 + jx'_3 + kx'_4) = \frac{(x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4)(A' + iB' + jC' + kD')}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2 + D'^2}}$$

Die allgemeinste orthogonale Substitution bei 4 Verän., derlichen schreibt sich dann einfach, indem wir einen Faktor M einführen:

$$M(x'_1 + ix'_2 + jx'_3 + kx'_4) = (A + iB + jC + kD)(x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4)(A' + iB' + jC' + kD').$$

In diesen Formeln ist in einfacher Weise unsere geometrische Theorie, daß jede eigentliche Collineation der Flächen zweiten Grades sich aus 2 Schiebungen der einen und der anderen Art zusammensetzt, analytisch formuliert. Wir fügen noch hinzu:

Für unsere geometrischen Anwendungen ist M ein Proportionalitätsfaktor. Wollen wir aber eine eigentliche orthogonale Substitution haben, soll also die Substitutionsdeterminante = +1 sein, so müssen wir für M den Werth in Anwendung bringen:

$$M = \sqrt{(A^2 + B^2 + C^2 + D^2)(A'^2 + B'^2 + C'^2 + D'^2).}^*)$$

*) Setzen wir in der Formel des Textes für $B', C', D' = -B, -C, -D$, so

Dies ist also die Theorie der eigentlichen Transformationen einer nulltheiligen Fläche zweiten Grades in sich, welche sich auf Grund unserer geometrischen Betrachtungen ergibt und die Cayley durch analytische Umformung erreichte.

„Cayley entwickelt nun ausführlich an dem genannten Orte, wie diese speciellen Formeln für $n = 4$, die so einfach und elegant sind, wie möglich, mit seinen allgemeinen Formeln, die für beliebiges n gelten, zusammenhängen.“ Wir wollen in dieser Hinsicht nur die eine Thatsache anführen: Wir haben die allgemeinen linearen Substitutionen durch 6 Constante $\lambda_{12}, \lambda_{13}, \lambda_{14}, \lambda_{34}, \lambda_{42}, \lambda_{23}$ charakterisiert.

Der Vergleich von Cayley ergibt nun:

Wir erhalten eine Schiebung erster Art, wenn $\lambda_{12} = \lambda_{34}, \lambda_{13} = \lambda_{42}, \lambda_{14} = \lambda_{23}$ ist, dagegen eine Schiebung zweiter Art, wenn: $\lambda_{12} = -\lambda_{34}, \lambda_{13} = -\lambda_{42}, \lambda_{14} = -\lambda_{23}$ ist.“

Es ist nun wohl am Platze, daß wir die entwickelten Formeln auf ihren reell-geometrischen Inhalt prüfen. Was bedeutet eine solche reelle Collineation,

bekommen wir in $M(x'_1 + ix'_2 + jx'_3 + kx'_4) = (A + iB + jC + kD)(x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4)(A - iB - jC - kD)$, indem $x'_1 = x_1$ wird und sich also die x_2, x_3, x_4 nur unter sich substituieren, die allgemeinste orthogonale Transformation der 3 Veränderlichen x_2, x_3, x_4 .

wie sie durch eine Schiebung erster Art dargestellt wird? Wie wandern die Punkte des Raumes bei einer solchen Collineation? Es bleiben offenbar, algebraisch zu reden, 2 Erzeugende der ersten Art punktweise fest, wir haben es also mit einer windschiefen Perspektive zu thun, für die diese beiden Erzeugenden die Leitlinien sind. Diese sind nun beide wie wir wissen imaginär u. zwar conjugiert imaginär, und rechts gewunden. Dann giebt es, wie wir gesehen haben, eine ganze Congruenz reeller Linien, die diese beiden imaginären Linien schneiden, durch jeden Punkt des Raumes geht je eine bestimmte gerade Linie derselben hindurch. Diese Congruenz ist links gewunden. Unsere For. mehr besagen also:

Unter A, B, C, D reelle Constante verstanden, erfährt der Raum eine reelle Collineation, bei der jeder Punkt auf der durch ihn hindurchgehenden geraden Linie einer bestimmten links gewundenen Congruenz mit imaginären Leitlinien ein Stück weit verschoben wird.

Wir wollen nun analoge Betrachtungen für die ringförmigen Flächen durchführen.

Es sei die Gleichung einer solchen Fläche gegeben durch:

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0 \text{ oder, indem wir ein reelles}$$

Tangentialetetraeder zu Grunde legen, durch:

$$y_1 y_3 + y_2 y_4 = 0.$$

Wir führen in bekannter Weise die Parameter λ und μ der zwei Arten der geradlinigen Erzeugenden ein durch:

$$\begin{cases} \lambda_1 y_2 - \lambda_2 y_1 = 0. \\ \lambda_1 y_3 + \lambda_2 y_4 = 0. \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} \mu_1 y_4 - \mu_2 y_1 = 0 \\ \mu_1 y_3 + \mu_2 y_2 = 0 \end{cases}$$

und betrachten wieder die λ und μ als Coördinaten eines Flächenpunktes. Wir haben also dann in gleicher Weise wie pag. 116 die Beziehungen:

$$\S y_1 = \lambda_1 \cdot \mu_1.$$

$$\S y_2 = \lambda_2 \cdot \mu_1.$$

$$\S y_3 = -\lambda_2 \cdot \mu_2.$$

$\S y_4 = \lambda_1 \cdot \mu_2$. Die y_1, y_2, y_3, y_4 sind jedoch jetzt, im Gegensatz zu pag. 116, für reelle Punkte auch reell.

Eine Schiebung der ersten Art wird gegeben durch die Formeln:

$$\lambda' = \frac{\alpha \lambda + \beta}{\gamma \lambda + \delta}, \quad \text{oder:} \quad \begin{aligned} \lambda'_1 &= \alpha \lambda_1 + \beta \lambda_2 \\ \lambda'_2 &= \gamma \lambda_1 + \delta \lambda_2. \end{aligned}$$

Analog lauten die Formeln für eine Schiebung zweiter Art. Wir erkennen sogleich:

Es giebt jetzt ebenso wie bei der nulltheiligen Fläche dreifach ∞ viele reelle Schiebungen der einen und der anderen Art; dieselben sind jetzt dadurch

charakterisiert, daß die zugehörigen Substitutionen von λ und μ reelle Coefficienten haben."

Wir geben jetzt unseren Betrachtungen eine neue Wendung, indem wir darauf ausgehen, auf unseren Flächen zweiten Grades eine "Geometrie" zu entwerfen. Dazu war bei den nulltheiligen Flächen kein Anlaß, da doch besonders reelle Verhältnisse unser Interesse beanspruchen.

Wie man in der Ebene die Gleichung:
 $f(x, y) = 0$ oder homogen geschrieben:
 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ - wo $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$ - als eine Curve interpretiert, so werden wir jetzt Gleichungen zwischen den λ und μ betrachten, $f(\lambda, \mu) = 0$, die wir als Curven auf der Fläche deuten. Um diese Gleichungen homogen zu machen, führen wir jedoch jetzt nicht ternäre homogene Variable ein, sondern wir setzen:

$\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, $\mu = \frac{\mu_1}{\mu_2}$, wodurch wir eine Gleichung bekommen: $f(\lambda_1, \lambda_2; \mu_1, \mu_2) = 0$, die in den λ wie in den μ binär homogen ist. [Hier eine doppelt = binäre Form gleich Null gesetzt -, oder eine ternäre Form gleich Null gesetzt.]

Diesem Unterschied in der homogenen Darstellung entspricht ein Unterschied in der

Auffassungsweise, den wir uns klar machen wollen, indem wir an die Ideen der Wintervorlesung anknüpfen. [vgl. Erlanger Programm von 1872].

In der gewöhnlichen Geometrie der Ebene betrachten wir die Figuren unabhängig von ihrer absoluten Lage und Größe. Sprechen wir von einem rechtwinkligen Dreieck, so ist es ganz gleich, an welcher Stelle der Ebene wir dasselbe gelegen sein lassen, wie groß absolut genommen sein Flächeninhalt ist; mit andern Worten: wir betrachten die Figuren unabhängig von einer Parallelverschiebung, Drehung und (gleichmäßigen) Vergrößerung oder Verkleinerung. Bei der projektiven Auffassung, die uns hier allein interessiert, sind sogar alle die Figuren identisch, die durch Projektion aus einander hervorgehen. Diese Projektion wird gegeben durch:

$$x' = \frac{ax + by + c}{a''x + b''y + c''} ; \quad y' = \frac{a'x + b'y + c'}{a''x + b''y + c''} ;$$

oder homogen geschrieben:

$$\begin{cases} x'_1 = ax_1 + bx_2 + cx_3 \\ x'_2 = a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 \\ x'_3 = a''x_1 + b''x_2 + c''x_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'_1 = ax_1 + bx_2 + cx_3 \\ x'_2 = a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 \\ x'_3 = a''x_1 + b''x_2 + c''x_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'_1 = ax_1 + bx_2 + cx_3 \\ x'_2 = a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 \\ x'_3 = a''x_1 + b''x_2 + c''x_3 \end{cases}$$

Wir können sagen:

„Gleichungen zwischen 2 Variablen x und y werden in der projektiven Geometrie der Ebene nur hinsichtlich solcher Eigenschaften gedeutet, welche bei der Gruppe der hier hingeschriebenen linearen Substitutionen ungeändert bleiben und da diese Substitutionen sich am einfachsten schreiben, wenn man in der üblichen Weise 3 homogene Veränderliche einführt, so ist es in der projektiven Geometrie der Ebene angezeigt, statt mit x und y gleich mit x_1, x_2, x_3 d. h. ternär zu operieren.“

Wir erkennen jetzt leicht, wie die entsprechenden Verhältnisse sich gestalten, wenn wir eine Geometrie auf den ringförmigen Flächen zweiten Grades konstruieren wollen. Die Flächen zweiten Grades können, wie wir sahen, durch ∞^6 Col. lineationen in sich übergeführt werden; in den λ und μ stellt sich dies durch die Formeln dar:

$$\lambda' = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta} ; \quad \mu' = \frac{a\mu + b}{c\mu + d}.$$

„Auf der Fläche zweiten Grades finden daher die Gleichungen zwischen 2 Veränderlichen $f(\lambda, \mu) = 0$ hinsichtlich aller derjenigen ihrer Eigenschaften eine projektiv geometrische Inter,

pretation, die ungeändert bleiben, wenn λ und μ jedes für sich unabhängig von dem anderen einer gebrochenen linearen Substitution unterworfen wird."

Hierdurch bekommt die Geometrie auf den Flächen 2^{ten} Grades eine ganz andere Form als die der Ebene; es liegt dies eben daran, daß die Gruppe der Umänderungen beidemal eine ganz andere ist. Die obigen Substitutionen der λ und μ schreiben wir nun bequem in homogener Form so:

$$\begin{cases} \lambda'_1 = \alpha \lambda_1 + \beta \lambda_2 \\ \lambda'_2 = \gamma \lambda_1 + \delta \lambda_2 \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} \mu'_1 = a \mu_1 + b \mu_2 \\ \mu'_2 = c \mu_1 + d \mu_2 \end{cases}$$

Diesem Umstande wird nun eben dadurch am klarsten Rechnung getragen, daß man statt der Gleichung $f(\lambda, \mu) = 0$ eine doppelt binäre Form $f(\lambda_1, \lambda_2; \mu_1, \mu_2) = 0$ setzt."

Die allgemeine Auffassung aber, um welche es sich handelt, wird sich vielleicht anschliesend hieran mit den Worten bezeichnen lassen:

Es gibt bei 2 Veränderlichen so viel verschiedeneartige Betrachtungsweisen der Gleichung $f(x, y)$ oder $f(\lambda, \mu) = 0$ und also so viele Arten von zweidimensionaler Geometrie, als es verschiedene geschlossene Gruppen giebt, die man aus Transformationen der x und y

zusammensetzen kann, und je nach der Art dieser Gruppe wird es zweckmässig sein, bald die eine, bald die andere Art, sei es homogener, sei es nicht homogener Variabler zu benutzen."

Litterarische Bemerkung. Eine zusammenhängende Theorie der doppelt binären Formen ist erst vor ca 10 Jahren geschaffen worden:

Capelli 1879. Giornale di Matematiche Bd. 17.
Man wird dieser Arbeit, was die Entwicklung der Invariantentheorie angeht, unzweifelhaft eine grosse Bedeutung beilegen müssen, in der That kommen wir jetzt ohne die dort zum ersten Male gegebenen Sätze gar nicht mehr zurecht. [vgl. Referat von Köther, Fortschr. der Mathem. Bd. 11 pag. 91-95].

Vir wollen nun einige Einzelheiten der Geometrie auf den Flächen 2^{ten} Grades betrachten.

Es sei gegeben die algebraische Gleichung:
 $f(\lambda, \mu) = 0$; sie möge vom l^{ten} Grade in den λ und vom m^{ten} Grade in den μ sein.

Welcher Art ist die hierdurch dargestellte Curve?
Für $\lambda = \text{const.}$ liefert die Gleichung m Werthe von μ ,
für $\mu = \text{const.}$ entspr. l Werthe von λ . Dies besagt:

Eine Erzeugende erster Art wird von der Curve, algebraisch zu reden, in m Punkten

geschnitten, eine Erzeugende zweiter Art wird von der Curve in l Punkten geschnitten."

Schneiden wir unsere Raumkurve durch eine Tangentialebene, so erhalten wir auf der einen Erzeugenden m Punkte, auf der anderen l Punkte.

"Die Zahl der Schnitte mit der Tangentialebene und damit die Ordnung der Curve ist also $l + m$."

Wir wollen die einfachsten Fälle solcher Curven auf den Flächen 2^{ten} Grades einmal aufzählen:

Die Raumkurven erster Ordnung auf den Flächen 2^{ten} Grades ($l + m = 1$) sind natürlich die Erzeugenden der ersten oder der zweiten Art, je nachdem $l = 1$ und $m = 0$ oder $m = 1$ und $l = 0$ ist.

Setzen wir $l + m = 2$, betrachten wir also eine Curve zweiter Ordnung auf der F_2 , so haben wir die 3 Fälle zu unterscheiden, daß:

$$l = 2, \quad m = 0$$

$$l = 0, \quad m = 2$$

$$l = 1, \quad m = 1 \text{ ist.}$$

Die ersten beiden Fälle ergeben eine quadratische Gleichung der λ resp. der μ allein, liefern daher nur 2 Erzeugende der ersten resp. der zweiten Art, also keine neuen Curven. Im dritten Falle dagegen bekommen wir einen ebenen Kegelschnitt.

„Ein ebener Schnitt der Fläche ist demnach das,
selbe wie eine bilineare Gleichung zwischen den
 λ und μ .“

In der That liefert die Gleichung
 $0 = \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + \mu_3 y_3 + \mu_4 y_4$ vermöge der For-
 meln pag. 126 direkt die Bilinearrelation:

$$0 = \mu_1 \lambda_1 \mu_1 + \mu_2 \lambda_2 \mu_1 - \mu_3 \lambda_2 \mu_2 + \mu_4 \lambda_1 \mu_2.$$

Wir können dann ferner Curven dritter Ordnung
 in Betracht ziehen ($l + m = 3$). Hier haben wir
 die beiden Fälle zu unterscheiden:

$$l = 2, m = 1 \text{ und}$$

$$l = 1, m = 2.$$

Mit diesen Raumkurven
 hat man sich ja sehr viel beschäftigt, sie nehmen
 im Raume fast dieselbe Stellung ein wie die Ke-
 gelschnitte in der Ebene. Näher hierauf einzuge-
 hen wird jedoch nicht möglich sein.

Wir wollen nun weitergehend uns fragen:
 Kann man auf den Flächen 2^{ten} Grades eine
 Maassgeometrie konstruieren in analoger Weise,
 wie wir in der Ebene eine Maassgeometrie
 entworfen haben? Allgemein ist zu sagen:
„Die Geometrie im zweifach ausgedehnten Gebie-
 te wird eine Maassgeometrie, wenn die zu Grunde
 gelegte Gruppe von Transformationen erstens dreifach ∞ ist
 und zweitens für jedes Punktepaar des Gebietes eine

Invariante ergibt, (die wir als Entfernung dieser beiden Punkte deuten werden).

Die projektive Geometrie der Ebene hat nun be-
kanntlich eine Gruppe von achtfach ∞ vielen
Collineationen. Wenn man daher von der pro-
jektiven Geometrie aus eine Maassgeometrie kon-
struieren will, so muss man jedenfalls so viel
Collineationen ausscheiden, dass nur noch ei-
ne dreifach unendliche Mannigfaltigkeit von
Collineationen bleibt.

„Ein Beispiel für unseren letzten Satz ist daher
dieses, dass wir von der projektiven Geometrie
der Ebene mit ihren 8fach ∞ vielen Collineationen
zur Cayley'schen Maassbestimmung d. h. zur nicht-
Euklidischen Geometrie kommen, sobald wir
einen Kegelschnitt festhalten; da es deren ∞^5
gibt, geht jeder derselben noch durch dreifach
 ∞ viele Collineationen in sich über.“

[Aus dieser Cayley'schen Maassgeometrie
wurde dann die gewöhnliche Euklidische Geo-
metrie, wenn der Kegelschnitt in ein Punktepaar
und zwar spec. in das Paar imaginärer Kreispunkte
ausartete.]

Wie liegen die Verhältnisse nun bei den Flächen 2^{ten} Grades?
„Wir haben auf denselben zunächst auch mehr

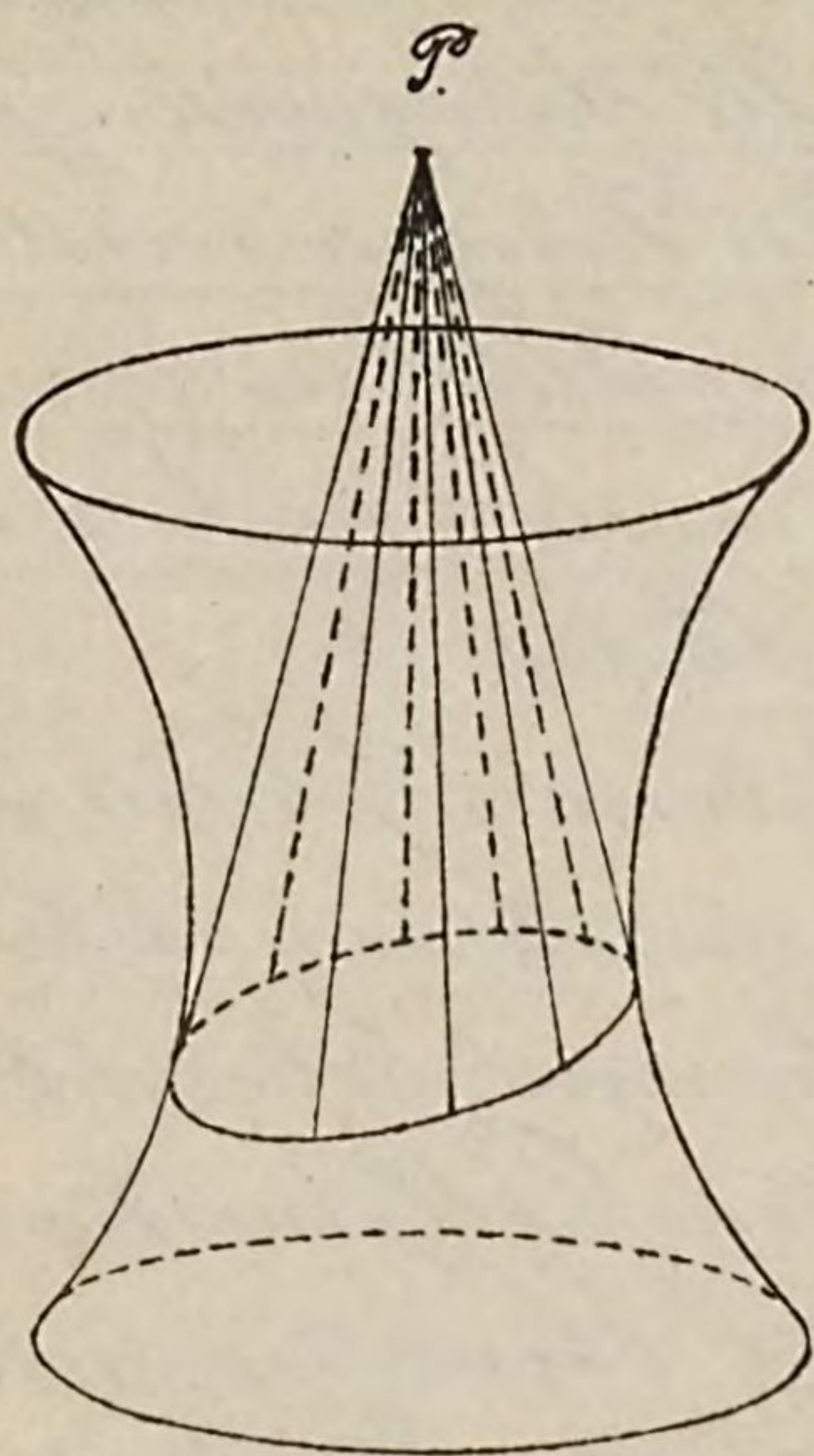
als dreifach ∞ viele, nämlich 6fach ∞ viele Um-
änderungen in Betracht gezogen. Wollen wir
eine Maassgeometrie auf den Flächen zweiten Gra-
des haben, müssen wir vor allen Dingen wieder
ein geometrisches Gebilde auf den Flächen zweiten
Grades festhalten, so, dass nur noch 3fach ∞ vie-
le Transformationen zulässig bleiben."

Wir wählen als solches festbleibendes Gebilde die Curve zweiter Ordnung, welche durch eine beliebige Ebene ausgeschnitten wird, und betrachten dementsprechend nur diejenigen Collineationen der Fläche in sich, welche diese Ebene in sich überführen. Wir scheiden so in der That aus der Gesamtheit der 6fach unendlich vielen Umformungen der Fläche 2^{ten} Grades eine dreifach unendliche Gruppe aus, da es ja dreifach unendlich viele Ebenen des Raumes giebt.

Dass es wirklich eine zugehörige Maassgeometrie auf der Fläche giebt, und welcher Art dieselbe ist, sehen wir am besten durch folgende Betrachtungen:

Bei den in Rede stehenden Umformungen bleibt nicht nur die Schnittebene, sondern auch der Pol der Schnittebene fest und mit ihm der ganze Umhüllungskegel, den man vom Pol aus

nach dem Schnitte an die Fläche legen kann.



In Bezug auf diesen festbleibenden Kegel zweiter Ordnung können wir dann aber für die vom Pol auslaufenden Strahlen in bekannter Weise eine Cayley'sche Maßbestimmung gründen: Unsere dreifach unendlich vielen Collineationen des Raumes ergeben für die vom Pol auslaufenden Strahlen gerade diejenigen Be-

wegungen, bei denen die nicht-Euklidischen Winkel erhalten bleiben, welche diese Strahlen bezüglich des vom Pol auslaufenden Umhüllungskegel miteinander einschließen."

Wir werden nun eine nicht-Euklidische Maßbestimmung auf einer Fläche 2^{ten} Grades haben, für welche unsere ∞^3 Collineationen die Bewegungen abgeben, wenn wir als Entfernung zweier Flächenpunkte einfach den nicht-Euklidischen Winkel wählen, unter welchen diese Flächenpunkte vom Pol aus gesehen werden, insbe-

sondere also als Länge eines Bogenelementes auf der Fläche zweiten Grades den so kleinen Winkel betrachten, den die bezüglichen Projektionsstrahlen miteinander bilden."

Dies läßt sich nun alles analytisch ausführen, wir wollen nur die Resultate mittheilen. Dieselben stützen sich auf die Definition des Winkels zweier Strahlen eines Bündels, die wir im vorigen Semester gegeben haben: $i. k'. \log. (2V)$, wo $2V$ das Doppelverhältniß dieser Strahlen mit den beiden Schnittstrahlen ihrer Ebene und des absoluten Kegels bezeichnet. (cf. die Wintervorlesung). Es wird hier nach der Abstand M zweier Punkte auf der Fläche zweiten Grades mit den Punkten λ, u und λ', u' :

$$M = 2k' \arcsin \sqrt{\frac{(\lambda\lambda')(\mu\mu')(u_1 u_3 + u_2 u_4)}{(u_1 \lambda_1 u_1 + u_2 \lambda_2 u_1 - u_3 \lambda_2 u_2 + u_4 \lambda_1 u_2)(u_1 \lambda'_1 u'_1 + \dots)}}$$

(wo k' eine beliebige Constante und $u_y = 0$ die Schnittebene; $u_1 u_3 + u_2 u_4 = 0$ aber die Bedingung ist, unter welcher die Ebene die Fläche berührt). Insbesondere ergibt sich hieraus (für zwei unendlich benachbarte Punkte) das Bogenelement ds , wenn man $\lambda' = \lambda + d\lambda$ und $u' = u + du$ setzt.

$$ds = 2k' \sqrt{\frac{(\lambda d\lambda)(\mu d\mu)(u_1 u_3 + u_2 u_4)}{(u_1 \lambda_1 u_1 + \dots)}}$$

Wir knüpfen hieran folgende Bemerkungen:
 1.) Die Punkte unseres ebenen Schnittes sind unendlich weit; denn für sie werden die Faktoren im Nenner:

$$\mu_1 \lambda_1 \mu_1 + \mu_2 \lambda'_2 \mu'_1 - \mu_3 \lambda_2 (\mu_2 + \mu_4 \lambda_1 \mu_2) = 0 \text{ und} \\ \mu_1 \lambda'_1 \mu'_1 + \mu_2 \lambda_2 \mu'_1 - \mu_3 \lambda'_2 (\mu'_2 + \mu_4 \lambda'_1 \mu'_2) = 0.$$

2.) Die Erzeugenden unserer Fläche zweiten Grades haben die Länge 0. Denn wenn $\lambda = \lambda'$ oder aber $\mu = \mu'$, was ja besagt, daß beide Punkte auf derselben Erzeugenden liegen, so verschwindet ein Faktor im Zähler.

3.) Wenn wir eine Tangentialebene festgehalten haben, so daß also $\mu_1 \mu_3 + \mu_2 \mu_4 = 0$ ist, dann wird M zunächst identisch 0 und erst durch einen zweckmäßigen Grenzübergang kann man ein von 0 verschiedenes M definieren. (Man läßt zu dem Zwecke das $k \infty$ werden, der Art, daß es multipliziert mit dem unendlich kleinen Bogen oder sin. Endliches ergibt.)

Es wird dann:

$$M = 2C' \cdot \sqrt{\frac{(\lambda \lambda')(\mu \mu')}{(\mu_1 \lambda_1 \mu_1 + \dots)(\mu_1 \lambda'_1 \mu'_1 + \dots)}} \text{ werden.}$$

4.) Im allgemeinen hat diese Maassbestimmung auf der Fläche 2^{ten} Grades selbstverständlich nicht =

Euklidischen Charakter, im Grenzfall wird es eine Euklidische Maßbestimmung sein.

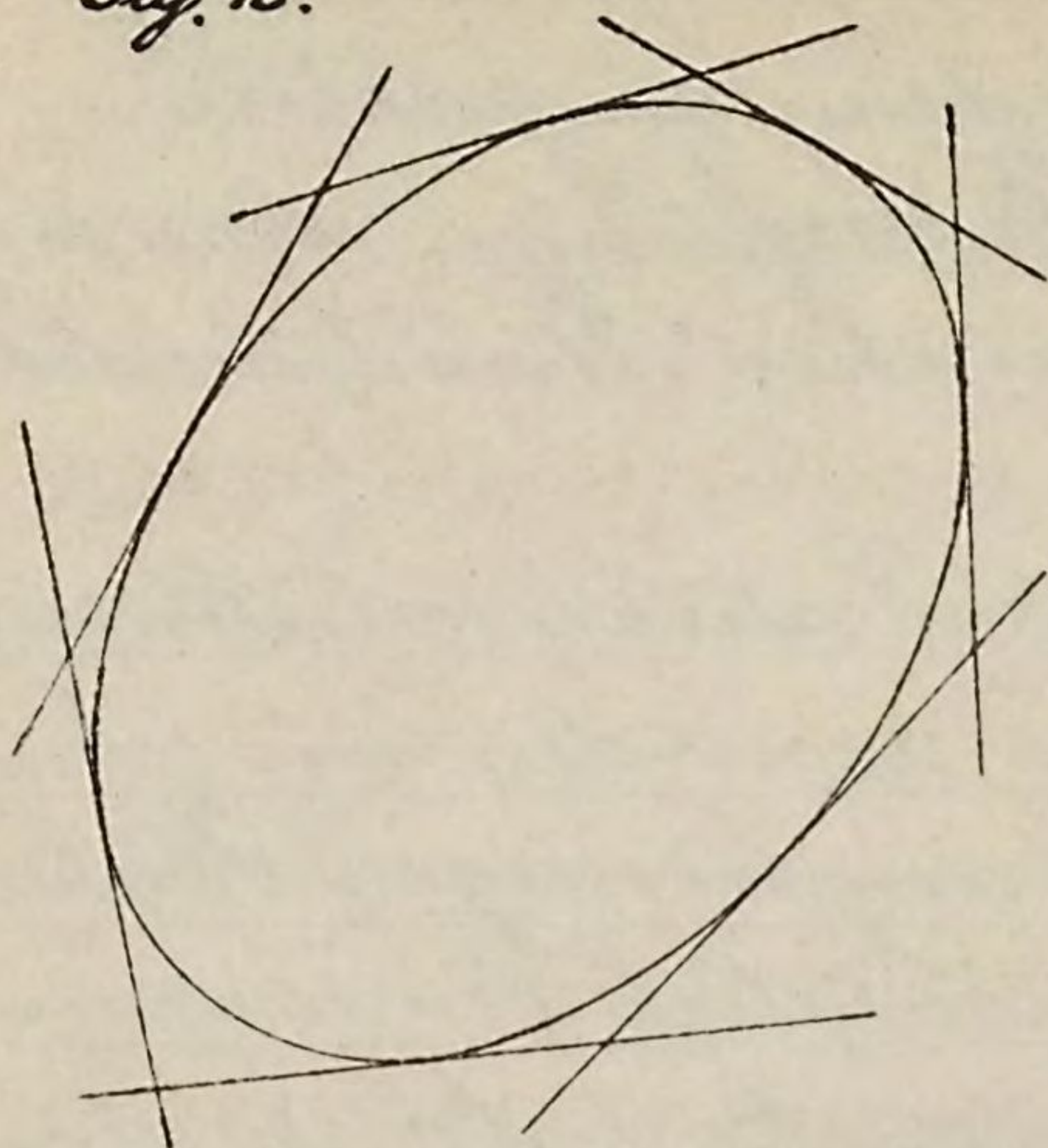
Wir haben bei diesen Bemerkungen nur erst einen allgemein-algebraischen Standpunkt eingenommen.

Wenn wir jedoch auf die Realitätsverhältnisse Rücksicht nehmen wollen, so werden wir sehen, daß sich dieselben für die ringförmigen Flächen freilich so verschieden wie möglich von denjenigen gestalten, die wir in der elementaren Geometrie der Ebene haben, indem alles das imaginär wird, was in der gewöhnlichen Geometrie reell ist und umgekehrt.

Es findet dies seinen Grund darin, daß es sich, wenn wir vom Pol auf die Polarebene projicieren, in letzterer zwar um die hyperbolische Geometrie bezüglich des eintheiligen Schnittkegelschnittes handelt, wohlverstanden aber in demjenigen Theil der Ebene, der außerhalb dieses Kegelschnittes liegt.

Das angegebene ds^2 ist dementsprechend eine indefinite quadratische Form der $d\lambda$ $d\mu$, die Linien ohne Länge sind reell, etc, etc. Wir haben gleich, wohl diese Maßgeometrie auf den ringförmigen Flächen zweiten Grades entwickelt, um den Contrast mit den analogen Beziehungen beiden

Fig. 18.



ovalen Flächen hervor.
treten zu lassen, bei de-
nen sich alles auf's
schönste unseren gewöhn-
lichen Anschauungen
entsprechend gestaltet.
Wir wollen noch einige
allgemeine Bemerkun-
gen über die ringförmig-
en Flächen anschließen.

Alle Bogenelemente der verschiedenen für dieselbe
Fläche geltenden Maafsbestimmungen sind in der
Form enthalten: $ds^2 = 2 \cdot F \cdot d\lambda d\mu$, wobei freilich
der Faktor F je nachdem bei der Maafsbestimmung
zu Grunde gelegten ebenen Schnitt verschieden ist.
Nach der gewöhnlichen Formel würde man ein
Bogenelement:

$$ds^2 = E d\lambda^2 + 2 F d\lambda d\mu + G d\mu^2 \text{ erwarten.}$$

Es ist daher hier $E = G = 0$ zu setzen; dies besagt
nichts anderes, als daß die Linien $\lambda = \text{const.}$ und
 $\mu = \text{const.}$ die Linien ohne Länge sind, wie wir
schon wissen. Wenn wir nun den Winkel berech-
nen, unter dem sich 2 Curven auf der Fläche
schneiden, so finden wir, daß derselbe von dem F ,
worin gerade die verschiedenen Maafsbestimmungen

sich unterscheiden, unabhängig wird. Es ist allgemein

$$\cos. \varphi = \frac{E d\lambda d\lambda + 2F(d\lambda du + d\lambda du) + G du du}{\sqrt{(E d\lambda^2 + 2F d\lambda du + G du^2)} \cdot \sqrt{(E d\lambda^2 + 2F d\lambda du + G du^2)}}.$$

Setzen wir hierin $E = G = 0$, so hebt sich F heraus, und es bleibt:

$$\cos. \varphi = \frac{d\lambda du + d\lambda \cdot du}{\sqrt{d\lambda du d\lambda du}}.$$

Geometrisch ausgesprochen heisst dies:

„Alle unsere Maassbestimmungen ergeben für den Winkel zweier Fortschreitungsrichtungen auf unserer Fläche je denselben Betrag, nämlich $\frac{1}{2} \log.$ desjenigen Doppelverhältnisses, welches die beiden Fortschreitungsrichtungen mit den durch ihren Schnittpunkt hindurchlaufenden geraden, linigen Erzeugenden der Fläche bilden.“

oder anders ausgedrückt:

„Alle von uns auf der Fläche construirten Maassbestimmungen sind zu einander conform.“

Wir erkennen hieraus zugleich:

„Wenn es auch wahr ist, dass wir auf den Flächen 2^{ten} Grades ohne Festhaltung eines ebenen Schnittes noch keine Maassgeometrie haben, so können wir doch von vornherein auf den Flächen 2^{ten} Grades von dem Winkel sprechen, welchen 2 Fortschreitungs-“

richtungen mit einander bilden."

Ovale Flächen 2^{ten} Grades.

Wenden wir uns nun zu den ovalen Flächen zweiten Grades. Ich möchte hier zunächst einige Citate über eigene frühere Arbeiten geben, die in den Jahren 1872-75 entstanden sind; in ihnen habe ich mich bestrebt, die Funktionentheorie in möglichst lebendige Beziehung zur projektiven Geometrie zu setzen.

Es ist hier zu erwähnen:

das Erlanger Programm vom Jahre 1872 (Note № 78),
Erlanger Bericht 1873: "Note über den Pascalschen Satz."

Ich habe hierin eine Uebertragung des Pascalschen Satzes auf die Raumgeometrie gegeben, die im wesentlichen darauf beruht, anstatt reelle Werthe von λ auf dem Kegelschnitt, die komplexen Größen $\lambda + i\eta$ auf der Kugel zu deuten. Diese Arbeit findet sich wie der abgedruckt in den Mathem. Annalen Bd. 22 (1883). Ferner ist zu nennen:

Mathem. Annalen Bd. 9 (1875): "Binäre Formen mit linearen Transformationen in sich."

In Verbindung damit erwähne ich die Dissertation von Wedekind,*) die im Auszuge in den Annalen Bd. 9 (1875) mitgetheilt ist: "Beiträge zur geometrischen Interpretation binärer Formen."

*) Erlangen. 1874.

Ich werde bald auf die dort gegebene Definition des Doppelverhältnisses von 4 Punkten auf der Kugel zurückkommen.

Wir wollen unseren Betrachtungen zunächst eine Kugel zu Grunde gelegt denken, die durch die Gleichung:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0 \text{ oder:}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \text{ gegeben sei.}$$

Wir setzen, wie bereits früher

$\lambda = \frac{x + iy}{1 - z}$, wo λ der Parameter der Erzeugenden erster Art ist. Was den Parameter μ der Erzeugenden zweiter Art angeht, so schreiben wir:

$$\mu = \frac{x - iy}{1 - z}.$$

Wir könnten auch den reciproken Werth wählen, doch ziehen wir die hier gegebene Definition von μ vor, da sie uns den Satz liefert:

„Die beiden imaginären Erzeugenden erster und zweiter Art, die durch denselben reellen Punkt der Kugel laufen, haben konjugiert imaginäre Parameterwerthe λ und μ .“

Nun betrachten wir gleich die Collineationen:

$$\lambda' = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta};$$

$$\mu' = \frac{a\mu + b}{c\mu + d}.$$

„Wollen wir nun reelle Collineationen des Raumes haben, so müssen wir offenbar die λ und μ

konjugiert imaginären Substitutionen unterwer-
fen, was aber doch 6-fach ∞ viele reelle Collineatio-
nen giebt, da von den 4 Verhältnissgrößen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$,
nachdem wir eine derselben gleich 1 gesetzt
haben, die anderen drei beliebige complexe, also
2-theilige Werthe annehmen können."

"Bei dieser Beschränkung auf das Reelle
kommen natürlich die einfachen Collineatio-
nen, die wir Schiebungen nannten, jetzt, bei den
ovalen Flächen in Wegfall."

Wir bezeichnen die reellen Collineationen
weiterhin mit:

$$\lambda' = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta}, \quad \mu' = \frac{\bar{\alpha}\mu + \bar{\beta}}{\bar{\gamma}\mu + \bar{\delta}}, \quad \text{wo die } \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}, \bar{\delta} \text{ die zu den } \alpha, \beta, \gamma, \delta$$

conjugiert complexen Größen sein mögen. Diese
Collineationen der ovalen Flächen in sich werden
nun geometrisch für uns die größte Bedeutung
haben. Wir werden nämlich eine nicht-Euklidische
Maassbestimmung des Raumes auf die ovalen Flä-
chen gründen, und jene ∞^6 reellen Transforma-
tionen sind dann die Bewegungen des Raumes
in dieser so definierten nicht-Euklidischen Geometrie.
Diese nicht-Euklidische Geometrie, welche sich auf
eine Ovalfläche gründet, bei welcher wir dann die
Punkte des Inneren hauptsächlich betrachten,

nennen wir in Uebereinstimmung mit dem Winterse-
mester hyperbolisch, da jede Gerade im Inneren ∞ fer-
ne Punkte bekommt. Die andere Geometrie dagegen,
welche mit den nulltheiligen Flächen 2^{ten} Grades
arbeitet, nennen wir elliptisch und die dritte, welche sich
auf eine ringförmige Fläche zweiten Grades stützt, las-
sen wir ohne Benennung, weil das ihr zugehörige Qua-
drat des Bogenelementes eine indefinite quadratische
Form der Differentiale der Coordinaten ist.

Im vorliegenden Falle, wo wir es mit den ovalen Flä-
chen zu thun haben, ist dann jeder Bewegung im hy-
perbolischen Raume eine solche Substitution der λ'
und μ' , wie oben angegeben, zugeordnet und um-
gekehrt. Es giebt sich daher hierbei eine eindeu-
tige Beziehung der Bewegung der hyperbolischen
Raumgeometrie auf die allgemeine, d. h. mit com-
plexen Veränderlichen ausgestattete, lineare Substi-
tution einer Veränderlichen λ .

Diese Beziehungen haben nun funktionentheoretisch eine
große Tragweite; es wird dies sofort hervortreten, wenn
wir dazu übergehen, das Programm weiter fortzufüh-
ren, das wir im vorigen Wintersemester aufstellten,
in Betreff solcher eindeutiger Funktionen, die durch
lineare Substitutionen in sich übergehen, d. h. der
automorphen Funktionen. (v. die Wintervorlesung, wie

auch Math. Annalen IX, p. 185).

Für diese Funktionen gilt, wie wir wissen:

$$f(\lambda) = f\left(\frac{\alpha_k \lambda + \beta_k}{\gamma_k \lambda + \delta_k}\right), \text{ für } k = 0, 1, 2, \dots, \text{ wo}$$

die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ im allge.

meinen hier in Frage kommenden Falle complexe Größen darstellen. Um das Wesen dieser Substitutionen sich klar zu machen, wird dann die nicht-Euklidische Geometrie des hyperbolischen Raumes von großem Nutzen sein, indem diese uns einmal gestattet, jene Substitutionen als Verschiebungen u. Drehungen des Raumes zu deuten, weiter aber auch uns gewisse Ausdrücke, wie Winkel, Abstand etc., zu benutzen an die Hand giebt.

Wir werden bald auf diese Gedanken zurückzukommen haben; wir wollen jedoch zunächst in unseren geometrischen Betrachtungen fortfahren.

Zunächst eine sehr selbstverständliche Bemerkung!

Jede solche Formelgruppe:

$$\lambda' = \frac{\alpha \lambda + \beta}{\gamma \lambda + \delta} \text{ oder auch:}$$

$$\S \quad x'_1 = \alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 + \alpha_{13} x_3 + \alpha_{14} x_4.$$

$$\S \quad x'_2 = \alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2 + \alpha_{23} x_3 + \alpha_{24} x_4.$$

$$\S \quad x'_3 = \alpha_{31} x_1 + \alpha_{32} x_2 + \alpha_{33} x_3 + \alpha_{34} x_4.$$

$$\S \quad x'_4 = \alpha_{41} x_1 + \alpha_{42} x_2 + \alpha_{43} x_3 + \alpha_{44} x_4.$$

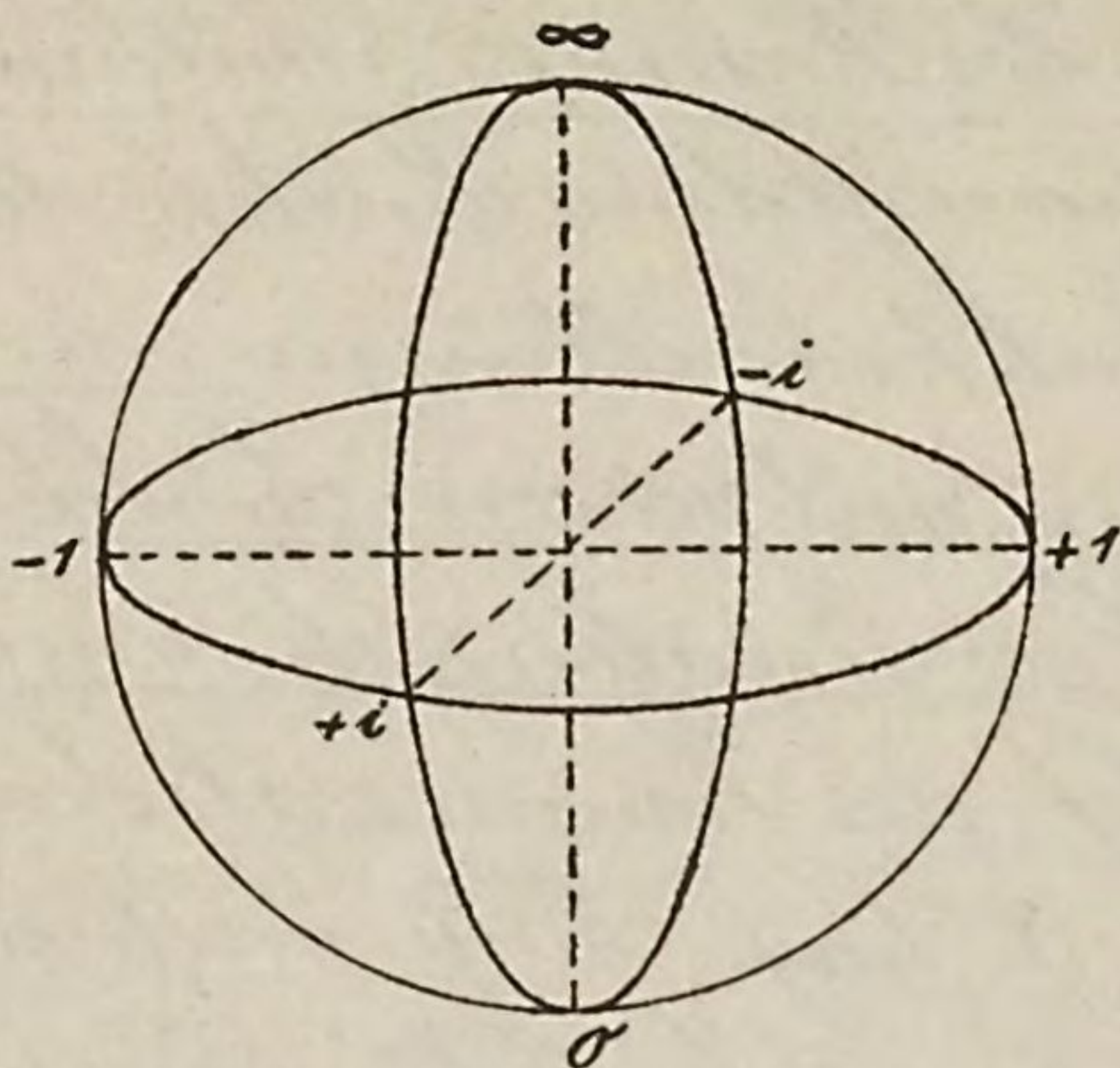
kann in doppelter Weise gedeutet werden, e einmal

indem man das Coordinatensystem festhält,
dagegen eine Umformung des Raumes annimmt.

In diesem Falle ordnet man jedem Punkte des Raumes einen anderen Punkt desselben zu oder aber indem man den Raum mit seinen Punkten festhält, dagegen sich das Coordinatensystem umformen läßt. Jeder Punkt des Raumes, alsdann, der jetzt die Coordinaten X' hat, hätte nach dieser zweiten Auffassung vorher die Coordinaten X . Dieser doppelten Auffassung werden wir gerecht, indem wir die Coordinaten eines Raumpunktes als eine relative Beziehung desselben zu dem Coordinatensystem bezeichnen.

Schließen wir uns nun einmal dieser letzten Auffassung an. Wir hatten bisher auf der Kugel unser λ in ganz bestimmter Weise gedeutet. Es war für den Nordpol $\lambda = \infty$, für den Südpol $\lambda = 0$, durch beide Punkte lief ein Meridian der reellen Zahlen, dessen Schnitt mit dem Aequator dann die Punkte ± 1 lieferte. Per zu dem Meridian der reellen Zahlen senkrechte Meridian stellte die rein imaginären Zahlen dar, dessen Schnitt mit dem Aequator ergab die Punkte $\pm i$. Wenn wir dann durch unsere Substitutionsformeln ein neues Coordinatensystem einführen, so werden wir die Punkte 0 & ∞ in ganz

Fig. 19.



beliebige Stellen auf der Kugel bringen können.

„Beim allgemeinen Koordinatensystem liegen daher die Punkte $0, 1, \infty$ an drei beliebigen Stellen der Kugel. Dadurch ist das System aber auch festgelegt.“ Nun ist die

Frage, wie konstruieren wir von den drei Punkten $0, 1, \infty$ in beliebiger Lage ausgehend die zu den übrigen Kugelpunkten gehörigen Coordinatenwerthe?*) Wir sagen zunächst folgendermassen: Weil es sich bei der linearen Substitution:

$\lambda = \frac{\alpha u + \beta}{\gamma u + \delta}$; $u' = \frac{\bar{\alpha} u + \bar{\beta}}{\bar{\gamma} u + \bar{\delta}}$, doch schließlich um eine Collineation handelt, bei welcher unsere Kugel in sich übergeführt wird, so wird die Ebene des Meridians der reellen Zahlen in eine neue Ebene übergehen, der Meridian selbst in den Schnitt dieser Ebene mit einer Kugel, d. h. in einen Kreis übergehen.

*) Wir könnten die ganze Frage von der Kugel natürlich auch auf eine beliebige andere ovale Fläche übertragen, was wir im Texte der Kürze halber unberührt lassen.

In neuen Coordinatensysteme werden daher die Punkte mit reellen Coordinaten auf demjenigen Kreise zu liegen haben, der durch die Punkte 0 & 1 hindurchgeht.

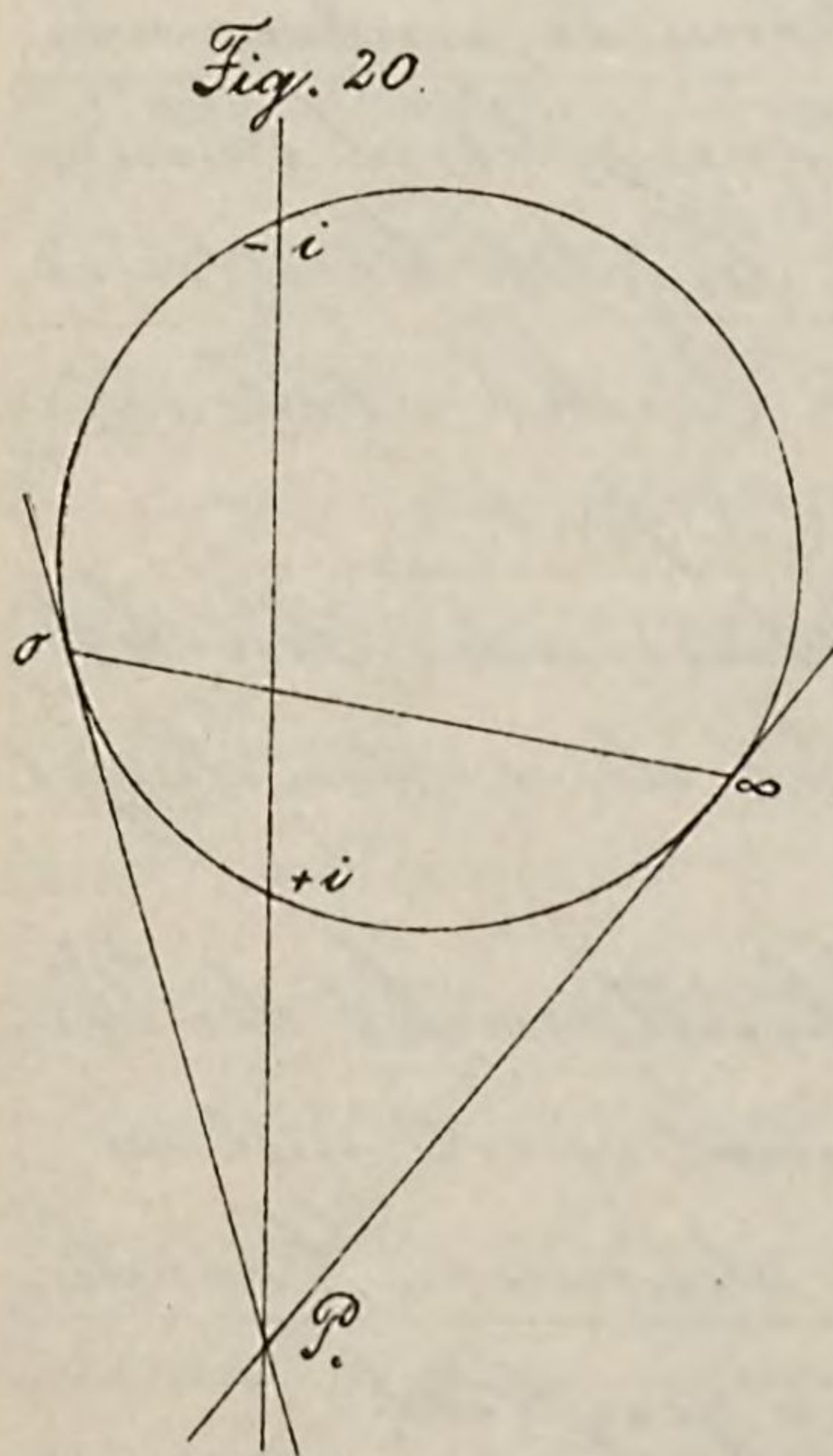
Da nun diese Kreislinie mit dem ursprünglichen Meridian der reellen Zahlen reell projektiv ist, so werden wir in der Weise des Wintersemesters die ganze Vertheilung der reellen Zahlen längs der Kreislinie konstruieren können, indem wir von den einmal gewählten 0 & 1 ausgehend immer wieder den 4^{ten} harmonischen Punkt konstruieren. So finden wir zunächst den Punkt -1 als den harmonischen Punkt zu 0 & 1 u. s. fort.

Hierbei ergibt sich nun ein bestimmter Punkt des Raumes, der dem Mittelpunkt der ersten Kugel entspricht.

Wir erhalten ihn einfach als Schnittpunkt der Verbindungslinien von -1 mit $+1$ und von 0 mit ∞ und nennen ihn das „Centrum des neuen Coordinatensystems.“ Wir erkennen zugleich:

„Centrum eines neuen Coordinatensystems auf der Kugel kann jeder Punkt des Kugelinnern sein und der zugehörige Kreis der reellen Zahlen durch jede durchs Centrum hindurchgehende Ebene ausgeschnitten werden.“

Wenn Centrum und Ebene des Kreises der reellen Zahlen beliebig angenommen ist, so kann man außerdem noch etwa den Punkt σ auf der Peripherie des betreffenden Kreises beliebig wählen, im übrigen ist dann das Coordinatensystem bestimmt. Um z. B. die Punkte $\pm i$ zu finden, sucht man den Pol der Ebene der reellen Zahlen und verbindet ihn mit dem Centrum.



Die Punkte $\pm i$ erscheinen dann als die Schnitte unserer Kugel mit dieser Verbindungslinie.

Noch genauer können wir die Lage der complexen Werthe auf der Kugel studieren, wenn wir uns vertraut machen mit der Bedeutung des „Doppelverhältnisses“ für vier beliebige Punkte der Kugel. Haben diese 4 Punkte die Coordinaten a, b, c, d , so verstehen wir doch das Doppelverhältniß derselben den Aus-

druck: $DV = \frac{(ad)(bc)}{(bd)(ac)}$. Dieses DV ist ganz unabh. hängig von der speciellen Wahl des Coordinatensystems. Fragen wir uns jedoch, wie wir das Doppelverhältniß $\frac{(ad)(bc)}{(bd)(ac)}$ von 4 Punkten der Kugel am einfachsten

nun auch projektivisch definieren können?

„Diese Frage nach der Bedeutung des Doppelverhältnisses von 4 Punkten ist für uns von früher her nur für den Fall vorweg erledigt, wo das Doppelverhältniß reell wird, indem die 4 Punkte einem und demselben Kugelkreise angehören.“

Es handelt sich da nämlich um das Doppelverhältniß von 4 Punkten eines Kreises, wie es ihnen in der gewöhnlichen synthetischen Geometrie beigelegt wird. *); wir ziehen bekanntlich, um dasselbe zu berechnen, von irgend einem Punkte des Kreises aus 4 Strahlen nach jenen Punkten, deren Doppelverhältniß uns das Doppelverhältniß der 4 Punkte liefert. Die Frage nach dem Doppelverhältniß von 4 beliebigen Punkten ist nun gerade die Aufgabe, die Wedekind in seiner (pag. 146 erwähnten) Dissertation behandelt hat. Wir werden bald näher hierauf einzugehen haben. Vorerst wollen wir noch bemerken, um die Betrachtung von pag. 150 abzu-
schließen:

*) Dem wir können den Kreis der reellen Zahlen unseres Coordinatensystems machen, worauf wir auf ihm dasselbe Gesetz der Werthevertheilung von λ haben, wie in der gewöhnlichen analytischen Geometrie, die nur reelle Werthe des Parameters λ kennt.

Wenn wir als die Punkte a, b, c die Punkte $0, \infty, 1$ wählen, außerdem $d = \lambda$ setzen, so wird das Doppelverhältniß der 4 Punkte $DV = \lambda$ werden.

„Nennen wir daher die Definition des komplexen Doppelverhältnisses, so werden wir die Coordinaten λ , welche irgend ein Kugelpunkt d in irgend einem unserer Coordinatensysteme bekommt, als das Doppelverhältniß definieren können, welches dieser Punkt d mit den 3 Coordinatengrundpunkten $0, \infty, 1$ bildet.“

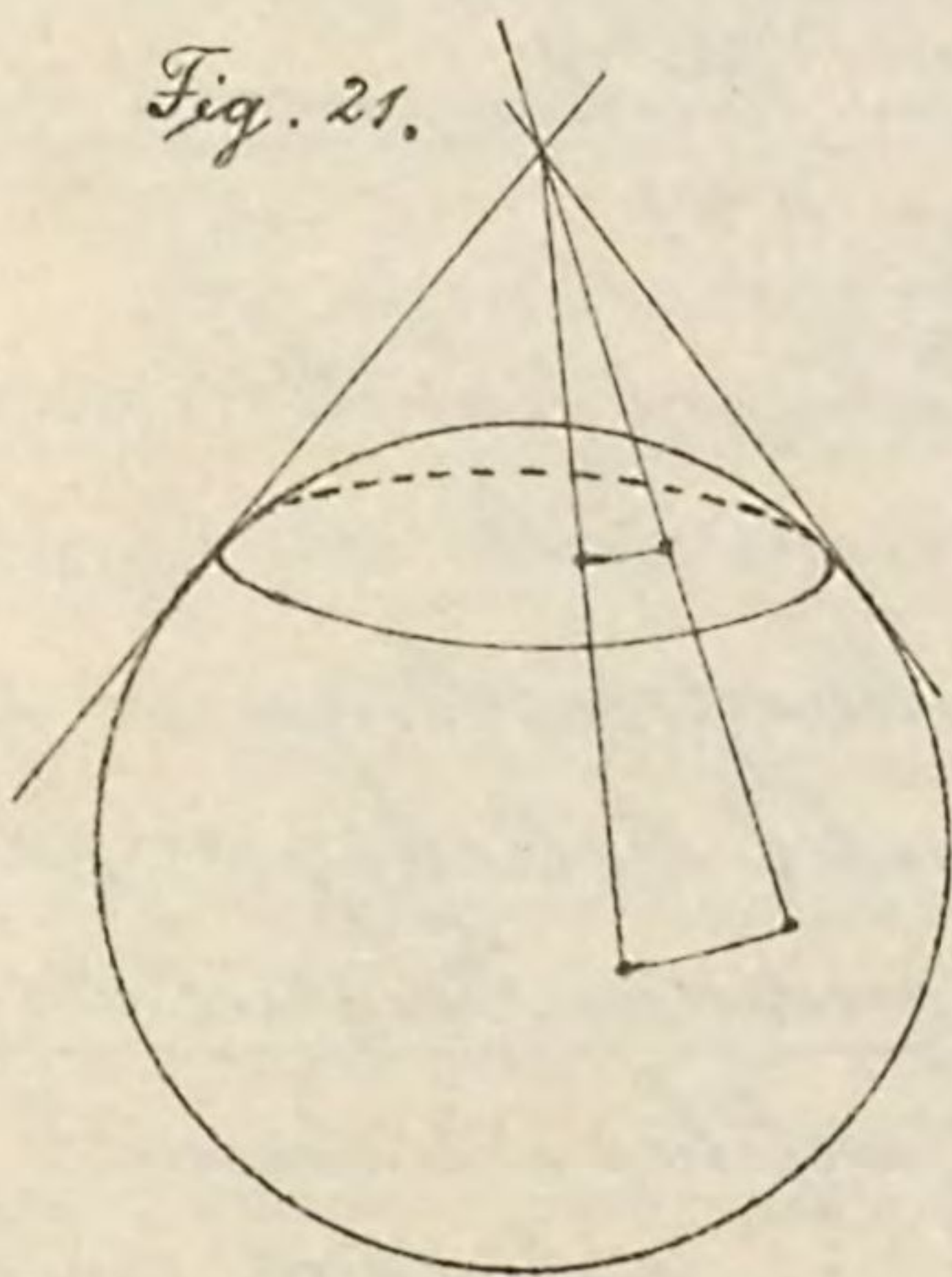
Ehe wir nun auf die Definition des komplexen Doppelverhältnisses eingehen, wollen wir auf die Kugel übertragen, was wir über die nicht-Euklidische Geometrie, auf den ringförmigen Flächen 2^{ten} Grades in der vorigen Vorlesung gesagt hatten. Diese Betrachtungen haben offenbar allgemeine Bedeutung. Um auf einer Fläche 2^{ten} Grades eine Maassbestimmung festzulegen, müssen wir, wie wir sahen, die 6-fach & vielen Collineationen der Fläche in sich beschränken dadurch, daß wir einen Punkt festhalten, der im Allgemeinen nicht auf der Fläche gelegen sein wird. Dann stimmt die Maassgeometrie auf der Fläche überein mit der Maassgeometrie in diesem Punkte, indem man als Fundamentalkegel den von diesem Punkte an die Fläche 2^{ten} Grades zu legenden Kegel annimmt. Bei den ovalen Flächen, als deren

Typus wir die Kugel wählten, haben wir dann folgende Fälle zu unterscheiden:

1.) Wenn der festgehaltene Punkt außerhalb der Kugel liegt und daher seine Polarebene die Kugel in einem eintheiligen Kreise schneidet, so haben wir es mit der hyperbolischen Maafbestimmung in jenem Punkte zu thun, die wir dann einfach durch Projektion auf die Kugel übertragen.

Als Entfernung zweier Punkte der Kugel definieren wir also den nicht-Euklidischen Winkel, unter dem jene Punkte von dem festgehaltenen Punkte aus gesehen werden, etc. Man hat dann jedoch noch die Wahl, ob man auf der einen oder der anderen Kugelkalotte operieren will. Die kürzesten Linien auf der Kugel

Fig. 21.



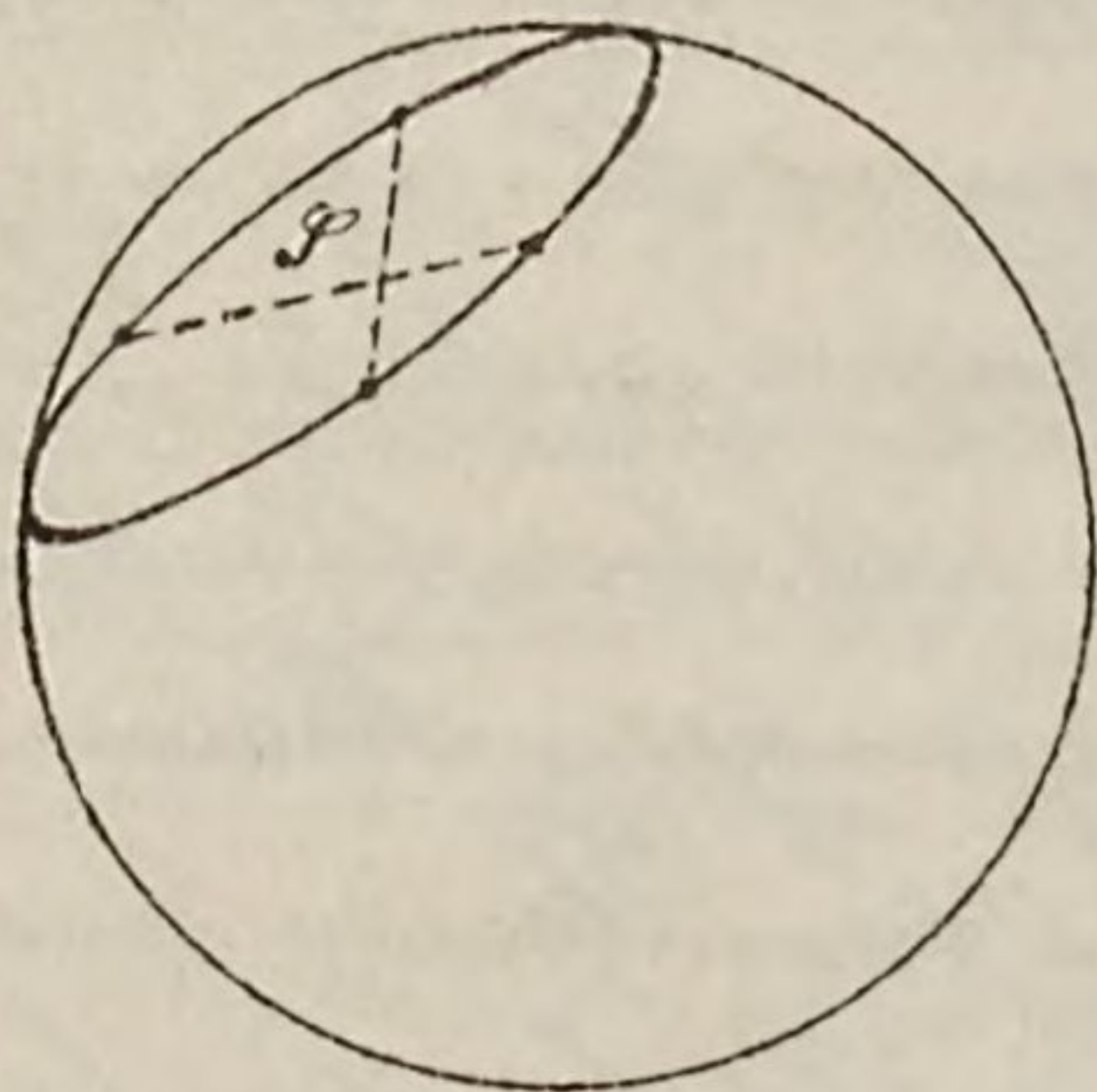
werden selbstverständlich von denjenigen Kreisen gebildet, deren Ebenen durch unseren Pol hindurchgehen.

2.) Halten wir dagegen einen Punkt im Innern der Kugel fest, so hat zwar auch dieser eine reelle Polarebene, der Schnitkreis aber und damit der Fundamentalkegel sind imaginär. Wir haben es

daher mit der elliptischen Geometrie des Strahlenbündels zu thun, die sich aber nicht etwa eindeutig auf 2 getrennte Halbkugeln der Kugel, sondern zweideutig auf die Gesamtkugel überträgt. Kürzeste Linien sind jetzt wieder diejenigen Kreise, deren Ebenen durch den Pol hindurchgehen.

3.) Den Uebergangsfall bildet die parabolische Maßgeometrie auf der Kugel, welche sich ergibt, wenn der festgehaltene Punkt auf der Kugel selbst liegt. Dieser Fall wird sich durch einen Grenzübergang aus dem vorigen erledigen.

Figur 22.



„Diese dreierlei Maßbestimmungen auf der Kugel sind uns in specieller Form schon im Wintersemester begegnet.“ *)

ad. 1. Während nämlich im allgemeinen Falle der hyperbolischen Maßbestimmung auf der Kugel der festbleibende Punkt beliebig außerhalb der Kugel angenommen wird, war das Beispiel der hyperbolischen Maßbestimmung, welches wir damals hatten, dadurch spezialisiert, daß wir als festbleibende Ebene die Äquatorebene nahmen, und also als festblei-

*) v. die Wintervorlesung.

enden Punkt einen ∞ weiten Punkt des Raumes.

In der That hatten wir damals die Maafbestimmung auf der Kugel gewonnen, indem wir dieselbe durch orthographische Projektion auf die Aequatorebene oder auf eine Parallelebene zu ihr bezogen. (v. Fig. 23).

ad 2. Ein Beispiel der elliptischen Maafbestimmung entstand, indem wir statt eines beliebigen Punktes des Kugelinneren den Mittelpunkt der Kugel festhielten, worauf eben die elementare sphärische Maafgeometrie entsteht. Die feste Polarebene ist dann die ∞ ferne Ebene des Raumes. (v. Fig. 24).

ad 3. Bezüglich der parabolischen Maafbestimmung war derjenige Fall bevorzugt, bei welchem der festbleibende Kugelpunkt auf der Kugel der höchst gelegene ist.

Wir hatten die Kugel damals durch stereographische Projektion auf die mit parabolischer Maafbestimmung ausgestattete Aequatorebene oder eine Parallelebene zu ihr bezogen und so die parabolische Maafbestimmung auf der Kugel gewonnen. (v. Fig. 25).

Indem wir die Kugel auf gewöhnliche rechtwinklige Coordinaten bezogen, hatten wir für die Bogenelemente ds_1, ds_2, ds_3 , Ausdrücke

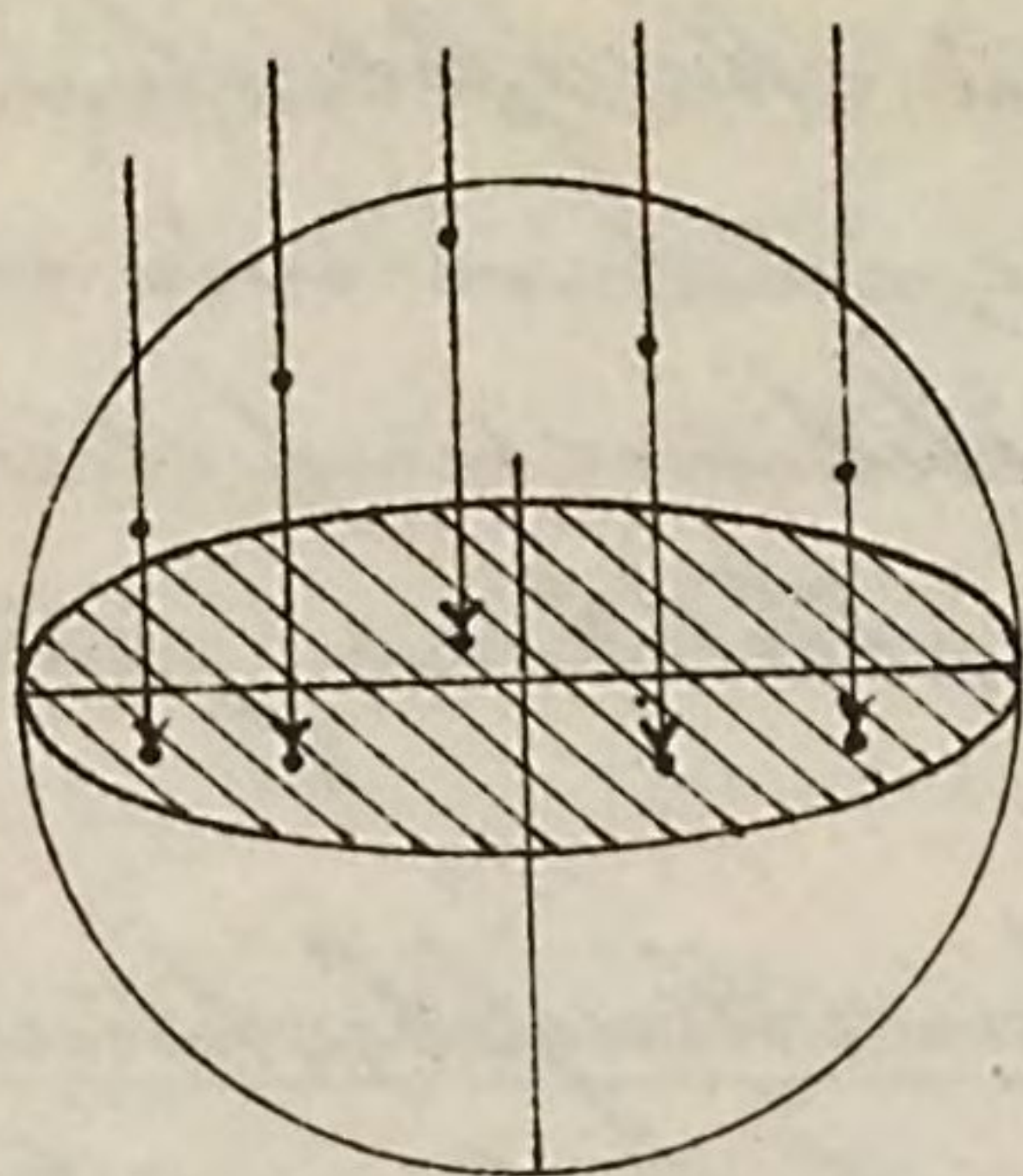


Fig. 23.

Fig. 24.

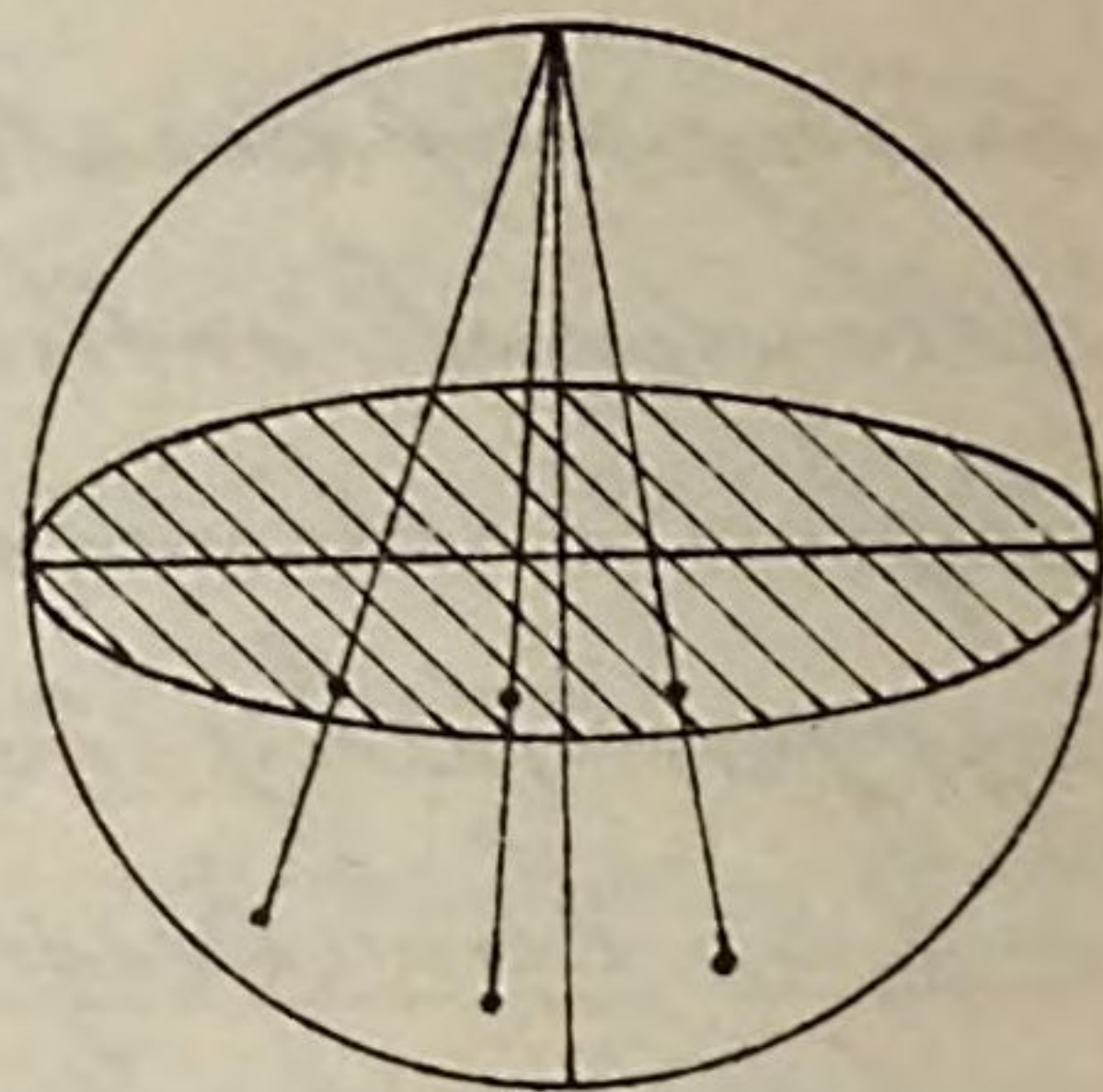
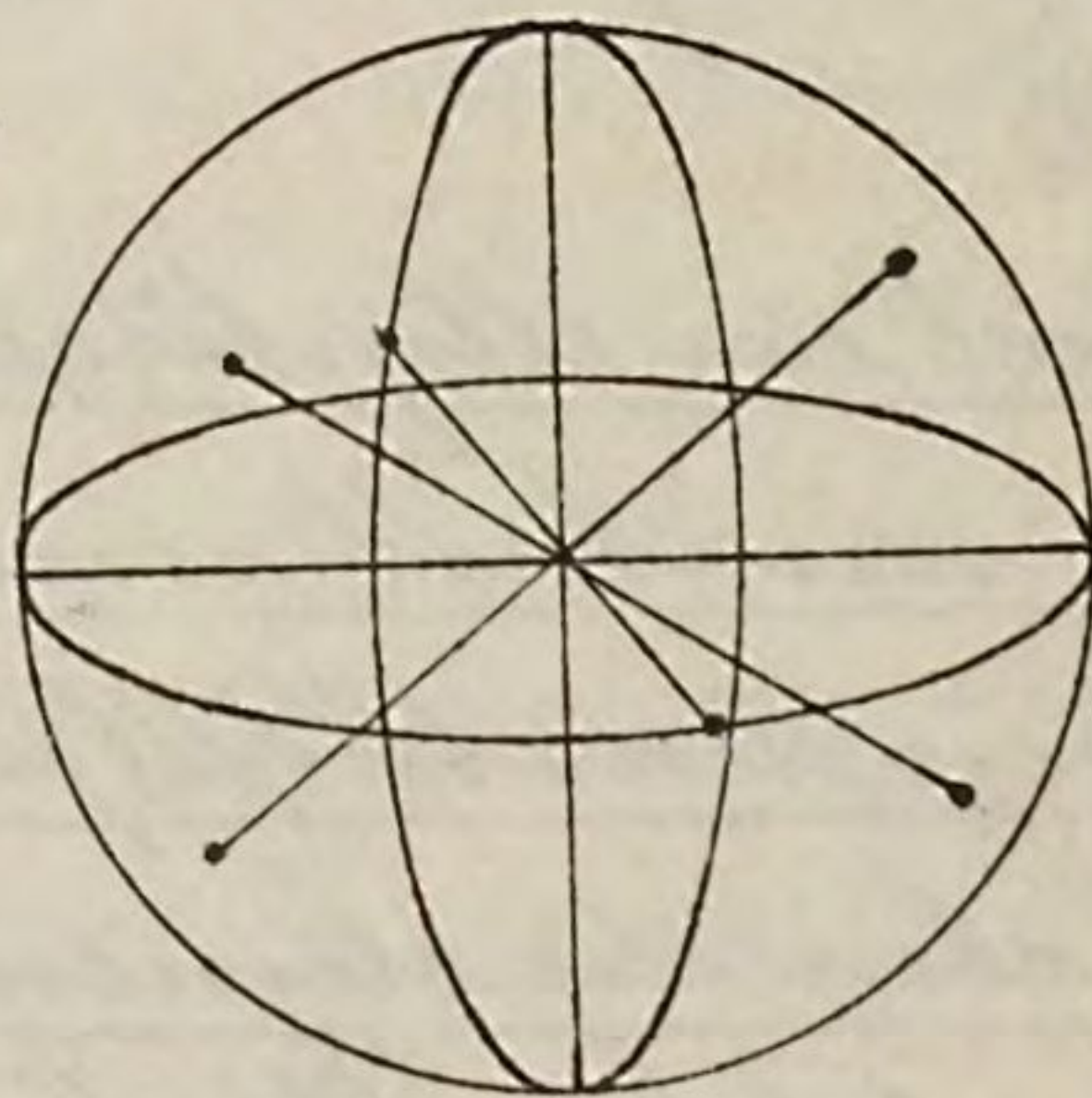


Fig. 25.

erhalten, an die wir uns doch auch erinnern wollen.
 Die Gleichung der Kugel sei $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$.
 Dann ist:

1.) bei der hyperbolischen Maassbestimmung des
 Winkelseiners:

$$ds_1 = \frac{\sqrt{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}}{\xi},$$

2.) bei der elliptischen Maassbestimmung:

$$ds_2 = \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2},$$

3.) bei der parabolischen Maassbestimmung:

$$ds_3 = 2 \frac{\sqrt{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}}{1 - \xi}$$

Setzen wir jetzt nach pag. 143:

$\lambda = \frac{\xi + i\eta}{1 - \xi}$; $\mu = \frac{\xi - i\eta}{1 - \xi}$, so wird unter Ber.
 rücksichtigung von
 $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$ umgekehrt:
 $\xi = \frac{\lambda + \mu}{1 + \lambda\mu}$; $\eta = \frac{\lambda - \mu}{(1 + \lambda\mu)i}$; $\zeta = \frac{\lambda\mu - 1}{1 + \lambda\mu}$ und
 unsere Formeln

gehen bei dieser Substitution über in

$$ds_1 = \frac{2\sqrt{d\lambda \cdot d\mu}}{\lambda\mu - 1}$$

$$ds_2 = \frac{2\sqrt{d\lambda \cdot d\mu}}{\lambda\mu + 1}$$

$ds_3 = 2\sqrt{d\lambda \cdot d\mu}$, wo $\sqrt{d\lambda \cdot d\mu}$ immer durch
 eine bilineare Verbindung der λ, μ dividiert ist.

Wir erkennen hieraus:

„Wenn man die Bogenelemente ds_1, ds_2, ds_3 des
 Winkelsexters durch λ und μ ausdrückt, so
 entstehen in der That Formeln, welche Specialfälle
 derjenigen sind, die wir in der vorigen Stunde für
 die nicht-Euklidische Geometrie auf einer Fläche
 2^{ten} Grades aufgestellt haben.“

Berücksichtigen wir dann die Entwicklungen
 auf pag. 148 ff., so ergibt sich weiter:

„Diese Formeln für ds_1, ds_2, ds_3 lassen sich für
 unseren allgemeinen Fall verwenden, wenn wir
 uns nur die Coordinaten λ, μ jedesmal in zweck-
 mäßiger Weise eingeführt denken.“

Was haben nun alle diese Maßbestimmungen
 auf der Kugel gemeinsam? Ja, in allen drei Fäl.

len berechnet sich offenbar der Winkel, welchen zwei Fortschreitungsrichtungen mit einander bilden, gleich, und zwar wird gemäß unserer früheren Formel:

$$\cos. \varphi = \frac{d \lambda \delta u + \delta \lambda d u}{\sqrt{d \lambda \cdot \delta u} \cdot \sqrt{\delta \lambda \cdot d u}}.$$

Alle unsere Maafbestimmungen sind also conform.

„Wir können den Winkel, welche zwei Fortschreitungsrichtungen δ und d einschließen, auch noch definieren, daß wir sagen: $\varphi = \frac{i}{2} \cdot \log. DV$, wo DV das Doppelverhältniß ist, welches die Fortschreitungsrichtungen d und δ mit den beiden imaginären Geraden bilden, die auf der Kugel durch den betreffenden Punkt hindurchlaufen.“

Diese Winkelbestimmung auf der Kugel ist alsdann die gewöhnliche der Euklidischen Geometrie, da ja in den betrachteten Maafbestimmungen auch die gewöhnliche Sphaerik eingeschlossen ist. *) —

*) Wollen wir doch noch besonders hervorheben, daß zwei conjugirte Ebenen, d. h. zwei Ebenen, von denen die eine durch den Pol der anderen geht, sich auf der Kugel rechtwinklig schneiden. Daher schneiden beispielsweise (p. 153) die sämtlichen kürzesten Linien einer hyperbolischen Maafbestimmung auf der Kugel den zugehörigen Grenzkreis rechtwinklig.

Nach diesem Excurs kehren wir zur Wedekind'schen Frage der Definition des Doppelverhältnisses für 4 Punkte der Kugel zurück.

Wenn wir 4 Punkte auf der Kugel haben und uns fragen, welche geometrischen Beziehungen derselben zu einander besonders dem Messen zugänglich sind, so werden dies offenbar nicht die Entfernungen der Punkte von einander sein; da diese ja bei hyperbolischer Maßbestimmung des Raumes ∞ werden, wohl aber bietet sich als besonders zweckmäßig die Winkelbestimmung auf der Kugel dar. Legen wir nämlich durch je drei der vier Punkte einen Kreis, so werden die Winkel, welche die entstehenden 4 Kreise A, B, C, D *) an jenen Punkten miteinander bilden, unveränderliche Elemente der Figur sein. Wenn wir die 4 Punkte durch Collineation beliebig auf der Kugel verschieben, so bleiben die Winkel jener Kreise stets dieselben. Man kommt daher auf den Gedanken, diese Eigenschaft der Winkel zur Definition des Doppelverhältnisses der 4 Punkte a, b, c, d zu benutzen. Die Ausführung dieses Gedankens ist der wesentliche Inhalt der Wedekind'schen Abhandlung. Vgl. Math. Ann. 9. pag. 211. Dort giebt Wedekind schließlich für unser Doppelverhältniss $\frac{(ad)(bc)}{(bd)(ac)}$ folgende Bedeutung:

*) Hierbei bezeichnet A den Kreis, der den Punkt a nicht enthält; entspr. B, C, D .

Es ist zunächst eine bestimmte Richtung festzulegen, in der jeder Kreis durchlaufen wird. Mit $\sin.(A C)d$ bezeichnet Neukind dann denjenigen Winkel, welcher die um den Punkt d nöthige Drehung misst, um die positive Richtung des Kreises A in die positive Richtung des Kreises C überzuführen. Das DV der 4 Punkte wird dann:

$$= \frac{\sin.(B C)d}{\sin.(A C)d} \cdot e^{+i(A B)d}.$$

Dieser Neukind'sche Ausdruck für das Doppelverhältniß versagt freilich in dem zum meist interessierenden Falle, wo die 4 Punkte in einer Ebene liegen.

Alsdann fallen die 4 Kreise zusammen, alle in Betracht kommenden Winkel werden gleich 0. Jener Ausdruck nimmt daher die Gestalt an $\frac{0}{0}$, kann aber dann durch Grenzübergang in die gewöhnliche Form der synthetischen Geometrie übergeführt werden. (Näheres v. in der genannten Abhandlung.)

Wir wollen übrigens noch einmal ausdrücklich hervorheben, daß die so gegebene Definition des DV ganz allgemein gilt, unabhängig von der spec. Maassgeometrie, in welcher wir auf der Kugel unsere Winkel messen.

Wir wollen heute die reelle Geometrie auf der reellen Kugel (die wir ein für allemal als Typus

der Ovalflächen wählen) behandeln, wobei wir unsere Entwicklungen auf die jedesmalige „Gruppe“ gründen, die wir den Umformungen zu Grunde legen. Ein kurzer Ueberblick zeigt uns, daß wir vier Gruppen kennen, die wir in Betracht ziehen können.

a.) Die allgemeinste Gruppe, welche die übrigen drei umfaßt, ist gegeben durch die Substitution (v. pag. 144):

$$\lambda' = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta}; \quad \mu' = \frac{\bar{\alpha}\mu + \bar{\beta}}{\bar{\gamma}\mu + \bar{\delta}}, \quad \text{wo } \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ beliebige}$$

komplexe Werthe annehmen können. Es gaben uns diese Formeln, wie wir wissen, die Gesamtheit der reellen Collineationen des Raumes, die unsere Kugel in sich überführen. [Projektive Geometrie auf der Kugel.].

b.) Wir betrachten ferner nur diejenigen Substitutionen, bei denen ein bestimmter Punkt außerhalb der Kugel festgehalten wird. Dies liefert uns bekanntlich die hyperbolische Maassbestimmung auf der Kugel; die Kugel selbst spaltet sich in zwei Halbkugeln durch den Berührungskreis des von dem festen Punkte an die Kugel gelegten Kegels.

c.) Wird ein Punkt auf der Kugel festgehalten, so haben wir die parabolische Maassbestimmung auf der Kugel.

d.) Liegt endlich der festgehaltene Punkt im Innern der Kugel, so liegt der Fall der elliptischen Maasse.

stimmung vor, wohin auch die gewöhnliche Sphärik gehört.
Diese vier Arten der Geometrie auf der Kugel wollen wir nun im einzelnen besprechen.

Fragen wir uns vorab, wie muß eine Gleichung $f(\lambda, \mu) = 0$ beschaffen sein, damit sie eine reelle Curve vorstellt, d. h. eine Curve, die in gewöhnlichen Coordinaten geschrieben reelle Coefficienten ergibt? (Es ist also nicht nöthig, daß die Curve einen reellen Linienzug darstellt.). Erinnern wir uns an die Formeln, welche den Zusammenhang von λ und μ mit den Coordinaten x, y, z ergeben (pag. 143), so ergibt sich leicht:

„Reelle Curven werden im Coordinatensystem durch solche Gleichungen vorgestellt, welche ungeändert bleiben, wenn ich innerhalb der Coefficienten $+i$ mit $-i$ vertausche und dann noch λ mit μ umwechsele.“

Eine reelle bilineare Gleichung z. B. muß hiernach die Form haben:

$A \cdot \lambda \mu + (B + iC) \lambda + (B - iC) \mu + D = 0$. Diese Gleichung stellt also einen reellen ebenen Schnitt der Kugel dar, d. h. den Schnitt mit einer reellen Ebene, mag dieser nun eintheilig oder nulltheilig sein.

Algebraisch werden uns wieder die linken Seiten der Gleichungen interessieren, nachdem wir vielleicht homogen gemacht haben, wir können diese charakteri-

sieren als „doppelt binäre Formen mit konjugierten Coefficienten.“

Betrachten wir nun insbesondere die Geometrie ad a. ad a.) Wir haben dann eine solche Form $f(\lambda_1, \lambda_2; \mu_1, \mu_2)$ zu untersuchen gegenüber der Gruppe der Substitutionen:

$$\lambda'_1 = \alpha \lambda_1 + \beta \lambda_2; \quad \mu'_1 = \bar{\alpha} \mu_1 + \bar{\beta} \mu_2.$$

$$\lambda'_2 = \gamma \lambda_1 + \delta \lambda_2; \quad \mu'_2 = \bar{\gamma} \mu_1 + \bar{\delta} \mu_2.$$

Besonders wird verlangt, die Invarianten einer solchen Form f gegenüber diesen Substitutionen zu erforschen. Fragt man, was bisher über die Invariantentheorie gearbeitet wurde, so ist zu sagen: Von Seiten der Algebraisten *) ist gar nichts, seitens der Zahlentheoretiker wenig hierüber geschrieben. Unter den letzteren ist zu nennen:

Hermite, sur la théorie des formes quadratiques.
Crelle Bd. 47.

Picard, Acta mathematica. Bd. 1, 2 u. 5.

Diese wenigen Citate mögen hier genügen.

Wir können übrigens diese ganze Invariantentheorie auch in der Ebene $x + iy - \lambda$ deuten.

*) Die Algebraisten machen über die Art der in ihren Formen vorkommenden Coefficienten keine Voraussetzung, die Zahlentheoretiker wählen die Coefficienten ganzzahlig, das ist der ganze Unterschied. Die Algebra erscheint hier als Vorstufe der Zahlentheorie.

„Die allgemeine projektive Geometrie der Kugelfläche findet in der $X + iy = \text{Ebene}$ dann ihr Abbild, wenn ich die ebene Geometrie unter Zugrundelegung der Gruppe der reciproken Radien traktiere, d. h. derjenigen Gruppe, welche die gewöhnlichen Bewegungen umfasst, die Ähnlichkeitstransformation, die Spiegelung und die eigentlich sogenannte Inversion durch reciproke Radien.“

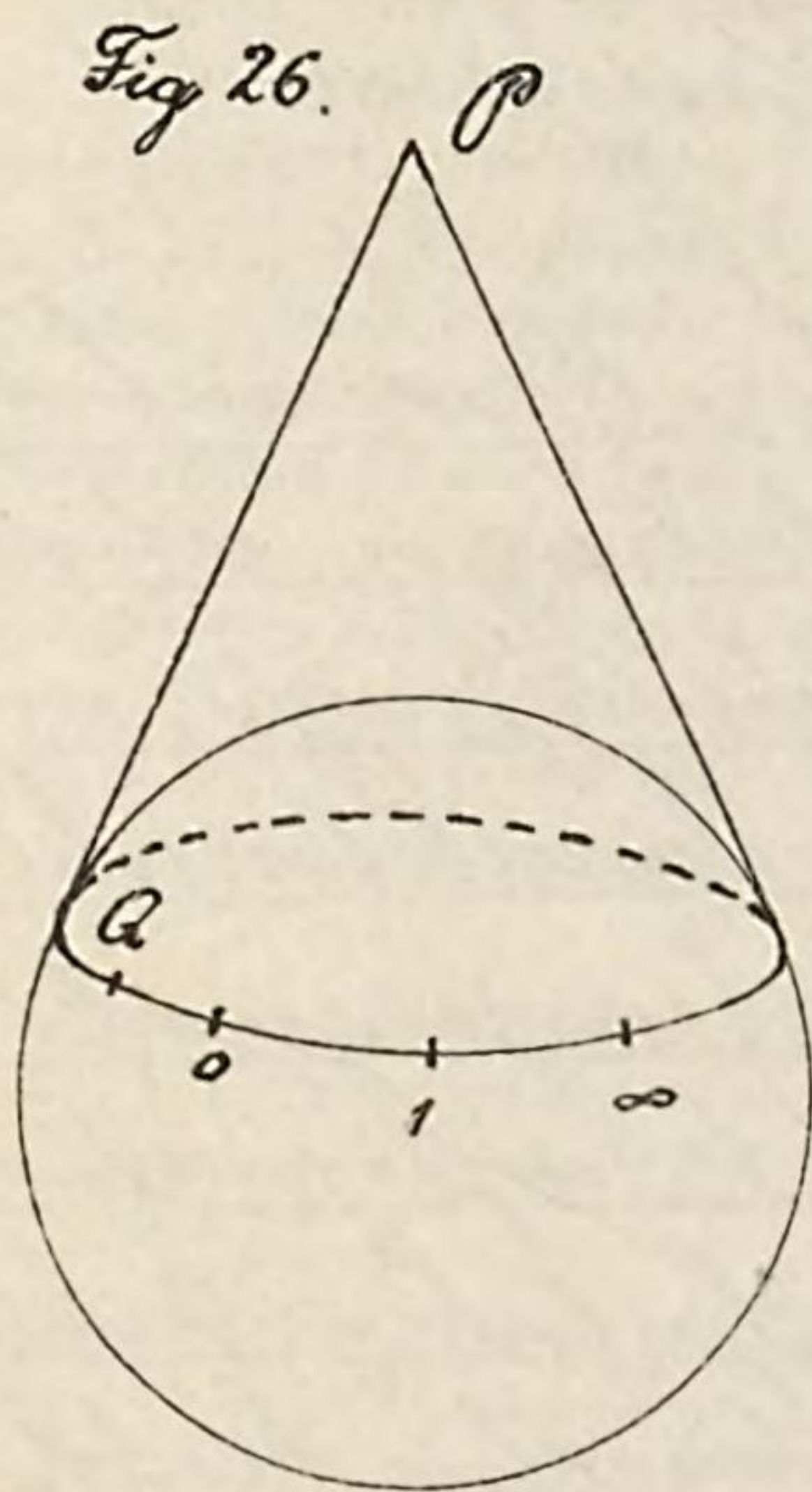
(vgl. Erlanger Programm S. 6, vgl. auch die Berichtigung in der italienischen Uebersetzung von 1890).

St. b. Wir wollen uns hier zuerst über die zugehörige Gruppe orientieren. Welche Gruppe von Umänderungen ist noch zulässig, wenn ein Punkt außerhalb der Kugel festgehalten wird?

Der Kreis, in welchem der von dem festen Punkt A an die Kugel gelegte Kegel diese berührt, muß in sich übergehen. Wir machen ihn zum Kreis der reellen Zahlen, indem wir auf ihm 01∞ beliebig annehmen. Es werden dann nur solche Substitutionen:

$\lambda' = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta}$ zulässig sein, bei denen reellen Werthen von λ reelle Werthe von λ' entsprechen, d. h. es müssen die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ reell sein. Es erleidet dann natürlich u ganz dieselbe Substitution: $u' = \frac{\alpha u + \beta}{\gamma u + \delta}$, weil doch der konjugierte Werth einer reellen GröÙe diese GröÙe selbst ist. Es werden daher λ und u dann congruent,

und die Gleichung $\lambda - \mu = 0$ bleibt bei allen Substitutionen ungeändert. Dies ist eben die Gleichung des Berührungskreises. Wenn wir die so definierte Geometrie auf der Kugel dann bequem auf die Ebene projicieren wollen, so ist es zulässig, den Projektionspunkt Q auf dem Kreise der reellen Zahlen zu wählen (spec. den Punkt ∞) und als Ebene diejenige Ebene anzunehmen, welche dem Projektionspunkt in Bezug auf das Kugelmittelpunkt diametral gegenüber liegt. Der Kreis der reellen Zahlen wird sich dann als Gerade projicieren, die wir als $X = \lambda \alpha e$ zu wählen haben.



Die unter sich identischen linearen Substitutionen von λ und μ mit reellen Coefficienten entsprechen dann den Bewegungen einer hyperbolischen Maßbestimmung in der $X + iy$ -Ebene, bei der die Punkte der $X = \lambda \alpha e$ das ∞ Weite vorstellen und die Kreise, welche die $X = \lambda \alpha e$ rechtwinklig schneiden, die geodätischen Linien sind. Denn letztere sind die Projektionen der Kugelschnitte, deren Ebene durch den im Raume

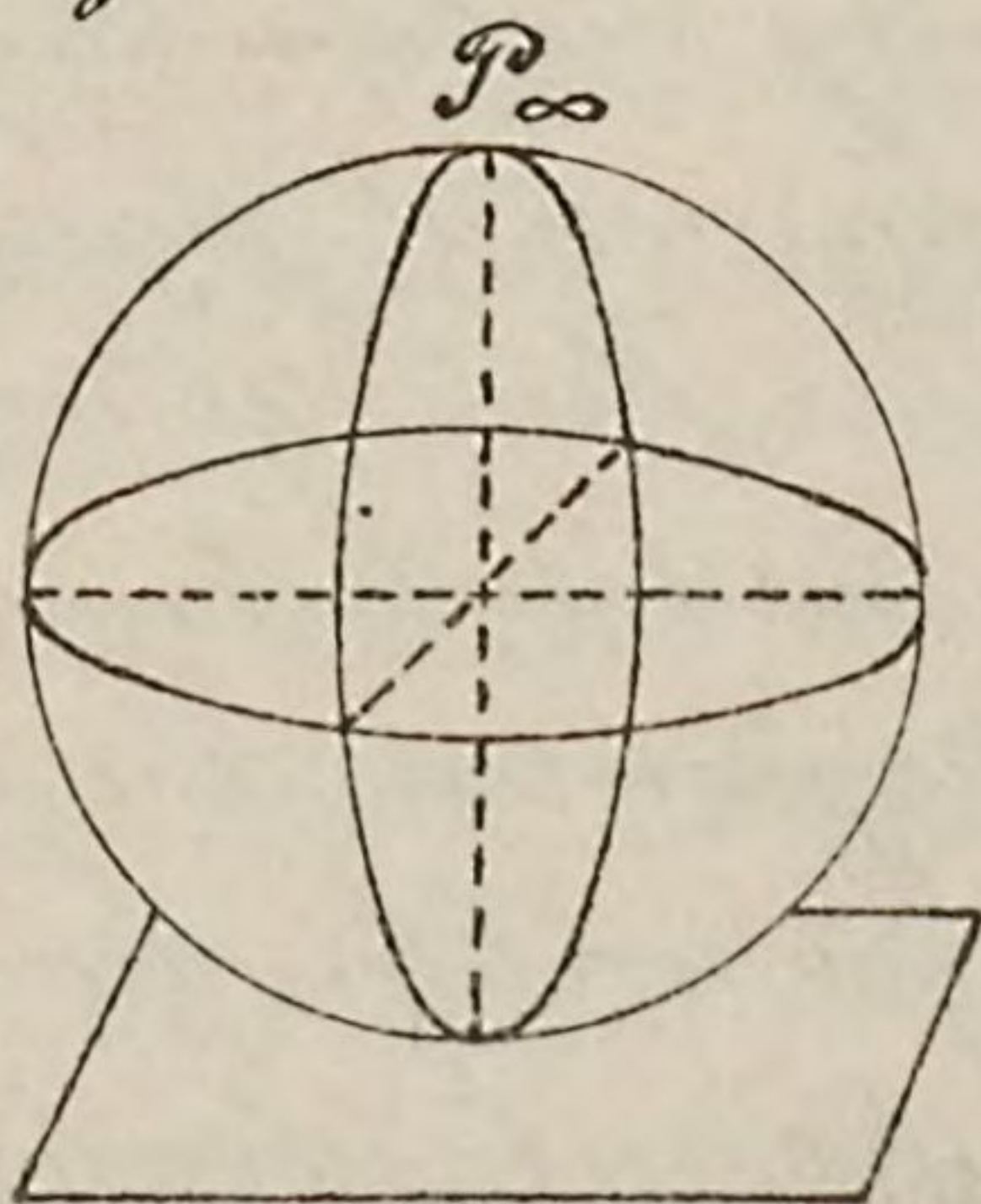
den Bewegungen einer hyperbolischen Maßbestimmung in der $X + iy$ -Ebene, bei der die Punkte der $X = \lambda \alpha e$ das ∞ Weite vorstellen und die Kreise, welche die $X = \lambda \alpha e$ rechtwinklig schneiden, die geodätischen Linien sind. Denn letztere sind die Projektionen der Kugelschnitte, deren Ebene durch den im Raume

festgehaltenen Punkt hindurchgeht. (vgl. Ann. pag. 158). Diese Art der Darstellung der hyperbolischen Geometrie haben wir übrigens ja im Wintersemester bereits ausführlich besprochen.

Ad c. Wir wählen den auf der Kugel gelegenen festbleibenden Punkt als den Punkt ∞ . Dann folgt, daß die hier in Betracht kommenden Substitutionen die Form haben müssen:

$$\lambda' = \alpha \lambda + \beta; \mu' = \bar{\alpha} \mu + \bar{\beta}.$$

Fig. 27.



In üblicher Weise auf die Ebene übertragen, ist dies bekanntlich die Gruppe, welche aus den Parallelverschiebungen, Drehungen und Ähnlichkeitstransformationen der gewöhnlichen Euklidischen Geometrie besteht. *)

Will ich mich aber auf solche Operationen beschränken, die die parabolische Maßbestimmung ungeändert lassen, so muß ich die Ähnlichkeitstransformationen im engeren Sinne ausschließen; dies bedingt, daß $\alpha = e^{i\varphi}$ zu setzen ist, d. h. es muß $|\alpha| = 1$ genommen werden.

*) Wir könnten diese Gruppe nach der allgemeinsten in ihr enthaltenen Transformationsart die Gruppe der „Ähnlichkeitstransformationen“ nennen.

Ad d. Was sind es hier für lineare Substitutionen, denen ich λ unterwerfen darf, wo wir einen Punkt innerhalb der Kugel festhalten? Diese Substitutionen haben offenbar die Eigenschaft, daß in Bezug auf den festbleibenden Punkt diametrale Werthe des λ wieder zu diametralen Werthen werden. *)

Wählt man daher den festbleibenden Punkt zum Centrum der Coordinatenbestimmung, so handelt es sich hier nur noch um diejenigen linearen Substitutionen, welche nach der Vorlesung, welche von den reellen Schiebungen einer nulltheiligen F_2 in sich handelte, durch die Formeln geliefert wurden:

$$\lambda' = \frac{(A + iC)\lambda - (B - iD)}{(B + iD)\lambda + (A - iC)} \quad \text{und entspr.}$$

$$\mu' = \frac{(A - iC)\mu - (B + iD)}{(B - iD)\mu + (A + iC)}.$$

Wir wollen diese Substitutionen solche vom Quaternionen-
neutypus nennen aus einem jetzt darzulegenden Grunde. **)

*) Insbesondere werden also die beiden festbleibenden Punkte jeder einzelnen Substitution diametrale Werthe sein.

**) der natürlich auf's Engste zusammenhängt mit der früher für die „Schiebungen“ aufgestellten Quaternionenformel, wir verfolgen das im Texte nicht weiter.

Es ist eine erste Substitution des λ gegeben durch:

$$\lambda'_1 = (A + iC) \lambda_1 - (B - iD) \lambda_2.$$

$\lambda'_2 = (B + iD) \lambda_1 + (A - iC) \lambda_2$. Ihre Determinante ist gleich $A^2 + B^2 + C^2 + D^2$.

Eine zweite Substitution sei:

$$\lambda''_1 = (A' + iC') \lambda'_1 - (B' - iD') \lambda'_2.$$

$\lambda''_2 = (B' + iD') \lambda'_1 + (A' - iC') \lambda'_2$. Die Determinante ist gleich $A'^2 + B'^2 + C'^2 + D'^2$.

Nun wollen wir diese beiden Substitutionen hintereinander anwenden, wie drückt sich dann $\lambda''_1 + \lambda''_2$ durch λ_1 und λ_2 aus?

Es wird offenbar:

$$\begin{aligned} \lambda''_1 &= \lambda_1 \cdot [(A' + iC')(A + iC) - (B' - iD')(B + iD)] \\ &\quad - \lambda_2 \cdot [(A' + iC')(B - iD) + (B' - iD')(A - iC)] \end{aligned}$$

oder:

$$\lambda''_1 = \lambda_1 \cdot (A'' + iC'') - \lambda_2 \cdot (B'' - iD'').$$

Entsprechendes ergibt die Ausrechnung:

$$\lambda''_2 = \lambda_1 \cdot (B'' + iD'') + \lambda_2 \cdot (A'' - iC'').$$

Eine einfache Vergleichung läßt dann erkennen, daß:

$$A'' = AA' - BB' - CC' - DD'.$$

$$B'' = AB' + A'B - CD' + C'D.$$

$$C'' = AC' + A'C + DB' - D'B.$$

$$D'' = AD' + A'D - BC' + B'C.$$

$$\left. \begin{array}{l} A''^2 + B''^2 + C''^2 + D''^2 = \\ (A^2 + B^2 + C^2 + D^2) \cdot \\ (A'^2 + B'^2 + C'^2 + D'^2). \end{array} \right\}$$

Auf Grund der Entwicklungen pag. 120 ergibt sich dann, was wir darlegen wollten:

Wir nennen eben unsere Substitutionen solche vom Quaternionentypus, weil zwei Substitutionen $(A B C D)$ und $(A' B' C' D')$ hintereinander angewandt sich gerade so kombinieren, wie man zwei Quaternionen multipliziert."

Im übrigen bedeutet natürlich jede solche Substitution eine Drehung der Kugel um das Centrum.

Wir werden nun nach der Drehungsaxe und dem Drehungswinkel fragen. Bezeichnen wir mit φ den Drehungswinkel und mit ξ, η, ζ die Coordinaten des einen Endpunktes der Drehungsaxe, so haben wir, wenn wir den Kugelkreis = 1 wählen:

$$A = \zeta \cos. \frac{\varphi}{2}, \quad B = \zeta \sin. \frac{\varphi}{2} \cdot \eta, \quad C = \zeta \sin. \frac{\varphi}{2} \cdot \xi;$$

$$D = \zeta \sin. \frac{\varphi}{2} \cdot \xi. *) ; \text{ wobei } A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = \zeta^2 \text{ wird.}$$

Diese Formel findet sich abgeleitet und discutirt beispielsweise in meinen Vorlesungen über das Tho. saeder. pag. 32-34. (Leipzig 1884).

Wir wollen die Betrachtungen der vier Arten der Geometrie auf der Kugel jetzt insoweit anwenden, daß wir eine Reihe von Bemerkungen funktionentheoretischen Charakters anknüpfen, die uns zeigen sollen, in welchen Fragen die Geometrien

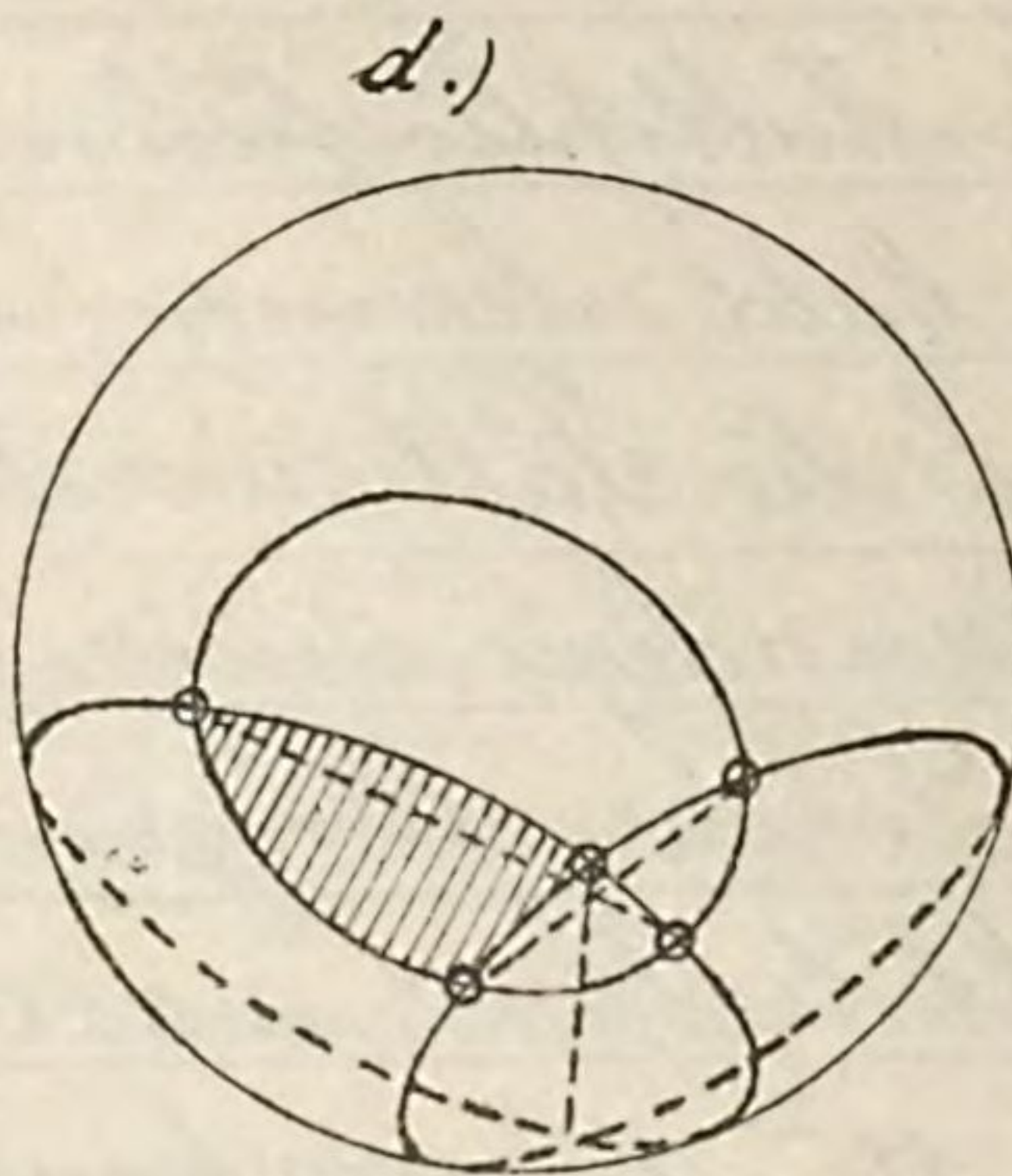
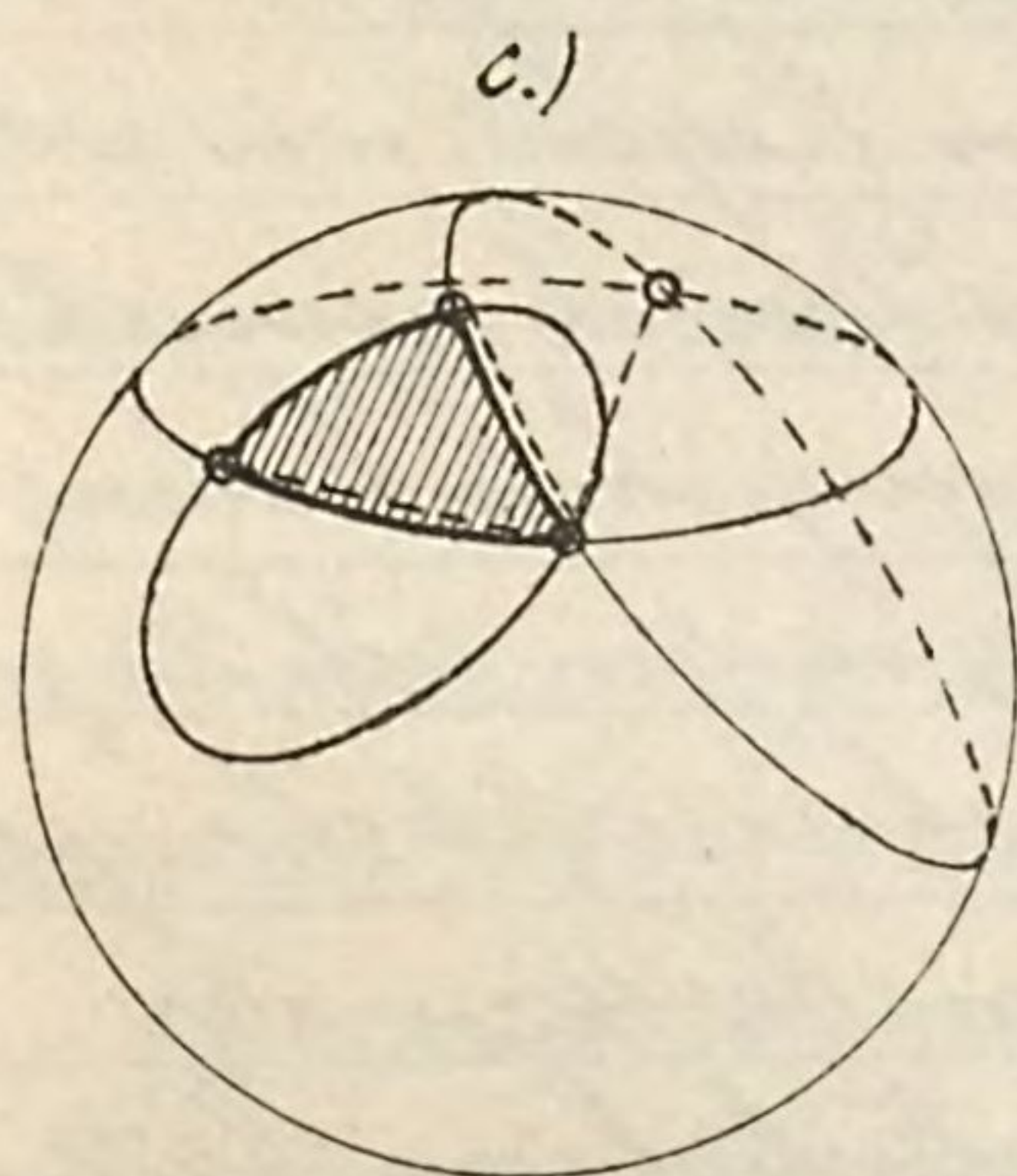
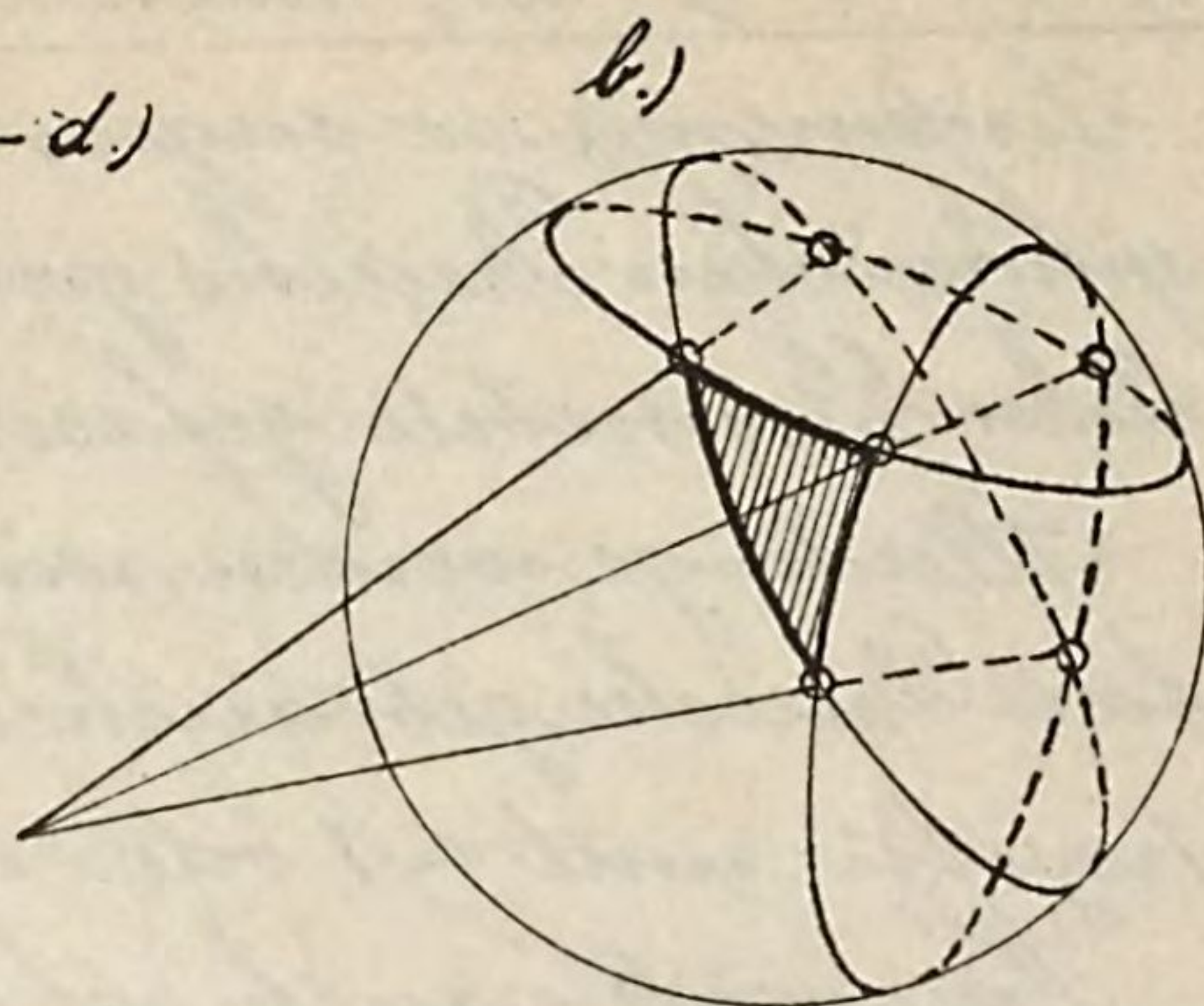
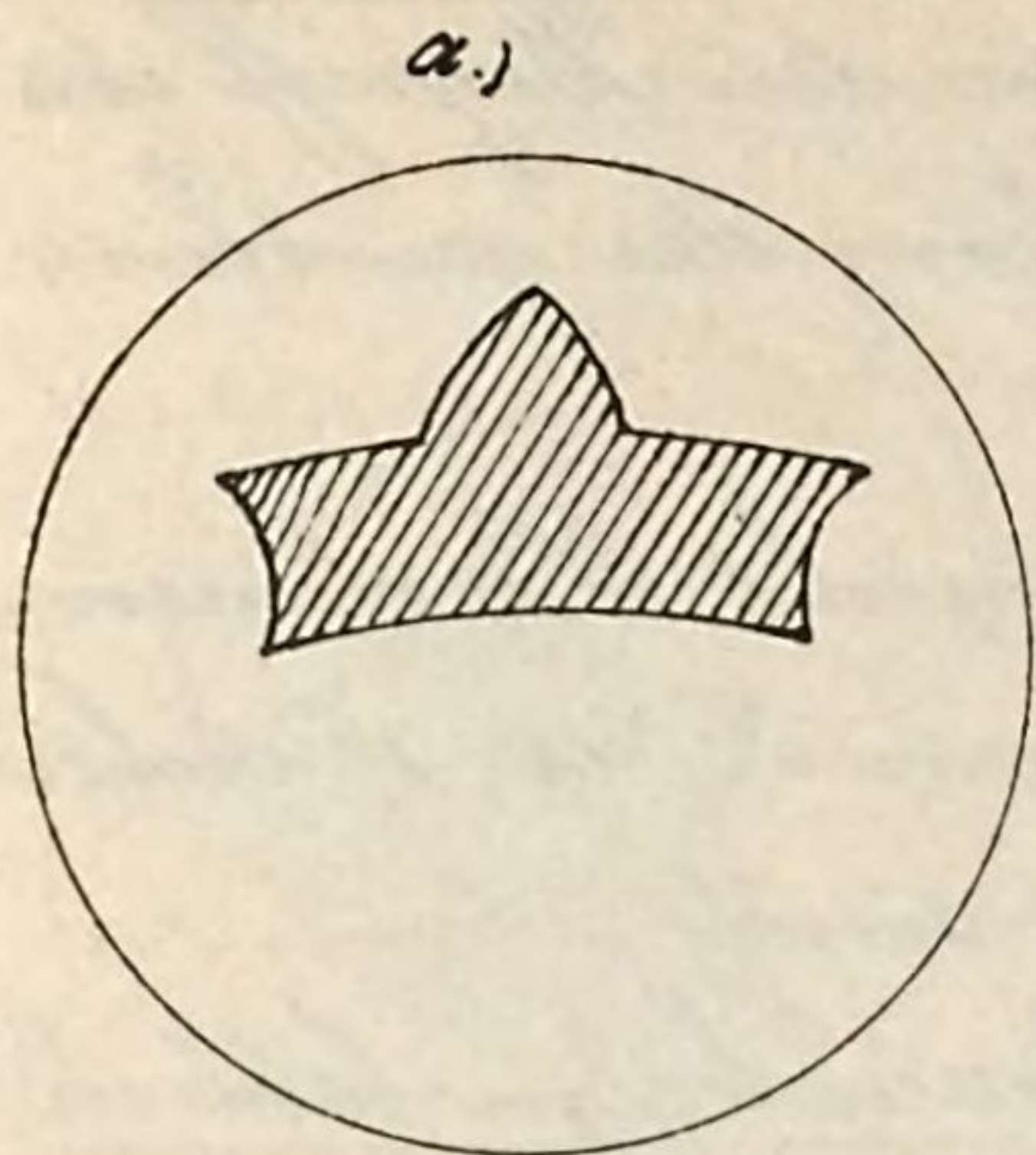
*) Man bemerkt, daß hier die Aufeinanderfolge der Buchstaben nicht glücklich gewählt ist; es wäre besser, A und D zu vertauschen.

in der Funktionentheorie von Bedeutung werden. Es sind hier 2 Punkte zu erwähnen (die untereinander natürlich eng zusammenhängen) die Theorie der linearen Differentialgleichungen 2^{ter} Ordnung und die Theorie der automorphen Funktionen einer Veränderlichen, die wir jetzt beide im Einzelnen besprechen wollen. In der Theorie der linearen Differentialgleichungen 2^{ter} Ordnung werden wir uns ganz allgemein mit bestimmten Kreisbogendreiecken oder Kreisbogenpolygonen zu beschäftigen haben, es sind dies Untersuchungen, welche anknüpfen an die Abhandlung: Schwarz, „zur Theorie der hypergeometrischen Reihe, Crelle Bd. 75.“ (1872).

„Die Geometrien b, c, d kommen in diesen funktionentheoretischen Untersuchungen alsdann zur Geltung, wenn man vom allgemeinen sphärischen Dreieck zu handeln hat, dessen Seitenflächen sich entweder in einem Punkte außerhalb der Kugel oder auf der Kugel oder im Innern der Kugel bezw. treffen werden.“

„Wenn wir uns dagegen überhaupt mit sphärischen Kreisbogenpolygonen beschäftigen, so wird die allgemeine projektive Geometrie a.) am Platze sein, es sei denn, daß sich zufälligerweise die Begrenzungsebenen des Polygons in einem einzigen Punkte schneiden, was auf die Geometrien b, c, d. hinführt.“

Fig. 28. (a-d.)



Um dies etwas auszuführen: Man kann einem gewöhnlichen sphärischen Dreieck, *) wenn es auf der Kugel gezeichnet ist, gleich ansehen, ob es der einen oder der anderen Art angehört. Bezeichnen wir die drei Winkel desselben mit $\lambda\pi$, $\alpha\pi$, $\nu\pi$, so haben wir den Satz:

Je nachdem bei einem solchen sphärischen Dreieck

*) d. h. einem solchen ohne überstumpfe Winkel.

$\lambda + \mu + \nu \leq 1$ ist, haben wir den Fall b, c oder d.

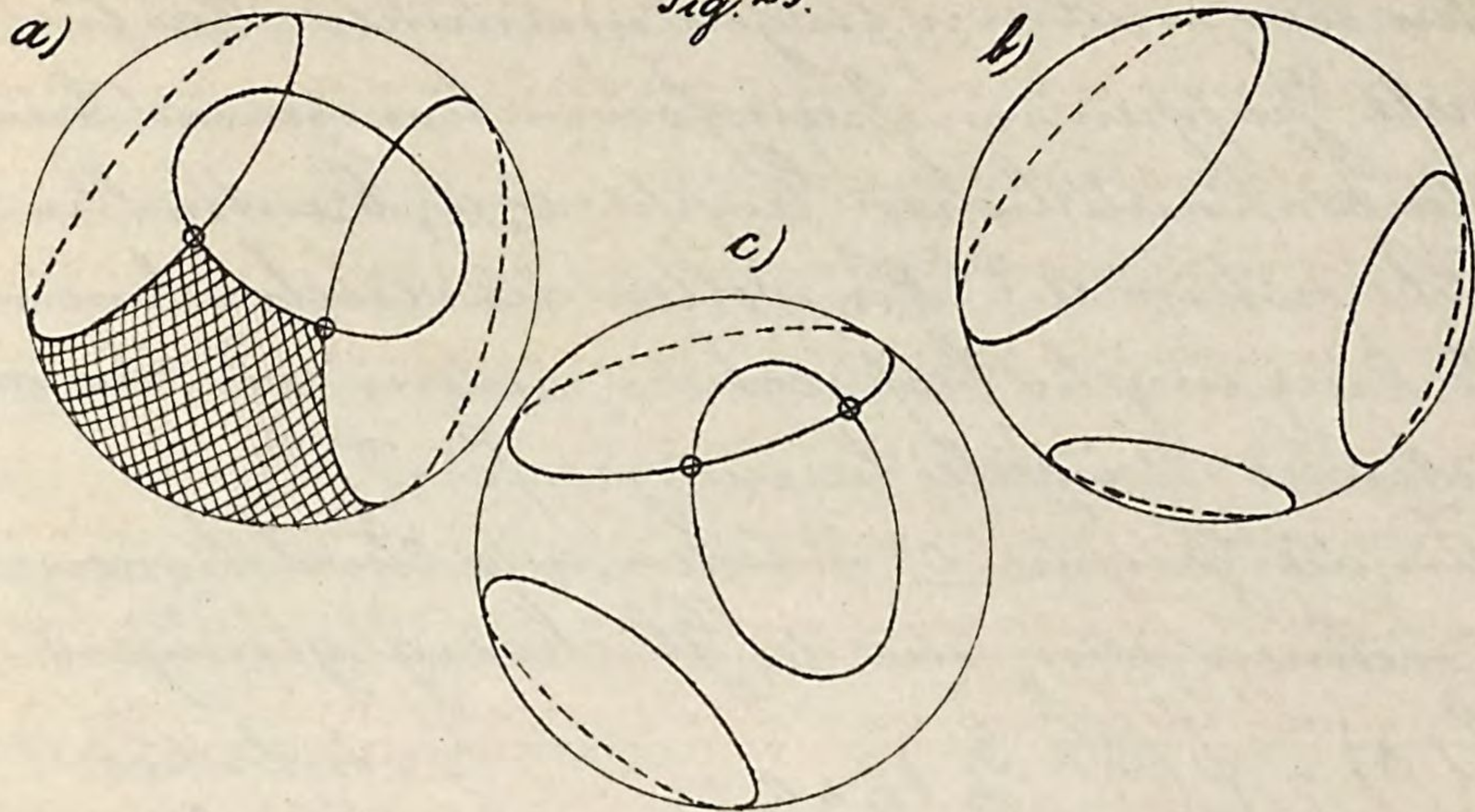
Indem wir so sagen, haben wir den Begriff des sphärischen Dreiecks ganz in der Form der gewöhnlichen Geometrie gefasst.

Allerdings werden wir später *) nicht bloß elementare Dreiecke gebrauchen, bei denen λ, μ, ν sicher positiv und < 1 oder doch < 2 sind.

Wir werden auch sphärische Dreiecke zu betrachten haben, bei denen Windungspunkte irgend welcher Multiplicitäten in den Ecken liegen, wir werden bald erkennen, wie ein solches Dreieck aussieht. Auch die Fälle werden wir heranzuziehen haben, wo geradezu einige Ecken fehlen, indem sich die zu den Ecken gehörigen Begrenzungskreise überhaupt nicht treffen, was bei negativen Werthen der λ^2, μ^2, ν^2 vorkommt und natürlich zur Kategorie b hinführt. Statt in eine Ecke auszulaufen, windet sich ein derartiges Dreieck mit einem zwischen zwei festen Kreisen eingeschlossenen Bande endlos um die Kugel herum.

*) Nämlich in der parallel laufenden Vorlesung über gewöhnliche lineare Differentialgleichungen, die λ, μ, ν sind uns dort als Exponentendifferenzen der P-Funktionen bereits bekannt!

Fig. 29.



Wir geben jetzt den in Aussicht gestellten Blick
auf die Theorie der automorphen Funktionen.

Eine automorphe Funktion wird durch die
Gleichung charakterisiert:

$$f(\lambda) = f\left(\frac{\alpha_k \lambda + \beta_k}{\gamma_k \lambda + \delta_k}\right), \quad k = 0, 1, \dots$$

Wir haben es hier mit einer „durchaus discreten“
Gruppe von Transformationen zu thun, indem
evidenterweise die Coefficienten der Substitution
nicht kontinuierliche Werthe annehmen dürfen,
auch keine unendlich kleinen Substitutionen vor-
kommen sollen. Doch werden offenbar die in An-
wendung kommenden discreten Transformationen

jedesmal in einer kontinuierlichen Gruppe enthalten sein, und wir fragen uns daher: Was für discrete Gruppen von Transformationen sind bereits in der kontinuierlichen Gruppe c, d, b enthalten?

Welche erst in a ? Wir wollen die verschiedenen Fälle kurz einzeln besprechen, indem wir charakteristische Beispiele herausgreifen.

1., In die Gruppe c werden alle Funktionen zu rechnen sein, die der Gleichung genügen:

$f(\lambda) = f(\lambda + \beta_k) \quad k = 0, 1, \dots$. Es sind dies die einfach und doppelt periodischen Funktionen.

2., Bei den Transformationen d soll ein Punkt des Kugelinnern fest bleiben, nehmen wir etwa der Einfachheit halber den Mittelpunkt. (Die betr. Transformationen sind also durch die gewöhnlichen Drehungen der Kugel um ihren Mittelpunkt veranschaulicht). Die hierher gehörigen Funktionen sind der eigentliche Gegenstand der Vorlesungen über das Ikosaeder. Vgl. daselbst insbesondere pag. 36-42. Dort sind zunächst die sämtlichen in Betracht kommenden Substitutionsgruppen angegeben. (Dieder, Tetraeder, Oktaeder u. Ikosaeder). Es handelt sich dann ferner um diejenigen rationalen Funktionen $f(\lambda)$, die bei den 60 Drehungen des Ikosaeders in sich ungeändert bleiben. Wir nennen solche

Funktionen: „fundamentale rationale Funktionen
der regulären Körper.“ Eben diese Funktionen
 sind dann die zur Kategorie d , gehörigen
 automorphen Funktionen.

3., In der Kategorie b , wird es sich um Funktionen
 handeln, die durch reelle Substitutionen
 in sich übergehen. Hierher gehören vor allen Din-
 gen die elliptischen Modulfunktionen, *) die sich
 ergeben, wenn wir die absolute Invariante $\frac{g^3}{\Delta}$ der
 elliptischen Funktionen auffassen als eine Funktion
 des Periodenquotienten $\tau = \frac{\omega'}{\omega}$. Diese bleiben un-
 geändert bei einer unendlichen Anzahl linearer
 Substitutionen $\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$, nämlich bei denjenigen
 Substitutionen, deren Coefficienten a, b, c, d reelle
 ganze Zahlen von der Determinante $ad - bc = 1$ sind.
 4., Zu b , gehören weiter noch die Funktionen, auf
 die Poincaré 1881 die Aufmerksamkeit lenkte, und
 die er „fonctions Fuchsianes“ nannte. Entsprechend
 bezeichnet er die durch Substitutionen der Gruppe
 in sich übergehenden Funktionen als „fonc-
 tions Kleinianes.“ Ich habe schon im vorigen
 Wintersemester darauf hingewiesen, dass ich die

*) vgl. die gleichzeitige Vorlesung über Differentialglei-
 chungen und das in Druck befindliche Werk von
 Fricke und mir.

se Benennungen für nicht zweckmäßig gewählt halte, und man lieber auf Personalbezeichnungen verzichten soll, zumal wenn sie leicht auch zu einer unrichtigen Auffassung über die Bedeutung der Arbeiten neben einander lebender Forscher Veranlassung geben können. Einmal hat Fuchs zwar in angrenzenden Gebieten, aber nicht eigentlich über die Funktionen b , gearbeitet, dann sind auch von anderen Forschern (Schwarz, Schottky, Riemann) wichtige Specialfälle der Funktionen b wie a bereits vorweg behandelt. Es wird wohl darauf verwiesen, dass auch die Benennung „Abel'sche Funktionen“ in ähnlicher Weise unrichtig eingeführt sei. Doch wenn Jacobi die von ihm untersuchten Funktionen zu Ehren von Abel als „Abel'sche Funktionen“ bezeichnet, so war dies eine freiwillige Selbstentsagung. Poincaré hat aber seine Bezeichnung ursprünglich gewählt, ohne die Literatur irgend wie genau zu kennen. Man könnte nun die bezeichneten Funktionen vielleicht Riemann'sche Funktionen nennen, wie ich in *Annalen* 19, pag. 564 vorschlug (insofern die gesamte funktionentheoretische Denkweise, mit der wir arbeiten, wesentlich auf Riemann zurückgeht), doch hat dieser Vorschlag keinen Anklang gefunden und ich ziehe

daher die Benennungen: allgemein automorphe und reell automorphe Funktionen etc. vor. Das bisher Gesagte läßt sich alsdann kurz zusammen fassen.

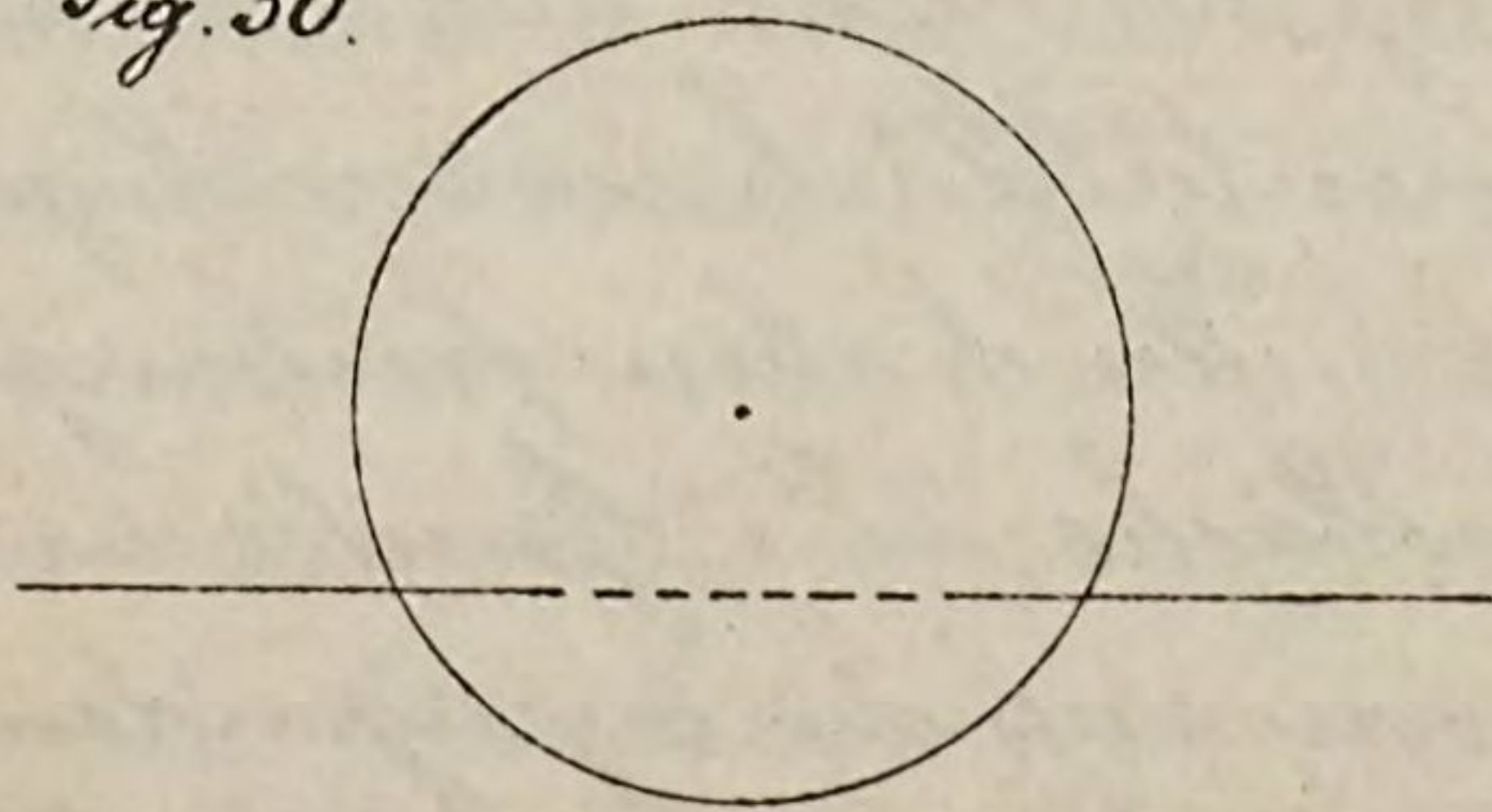
„Den Gruppen a, b, c, d entsprechend wird man die automorphen Funktionen einteilen in allgemein automorphe Funktionen, in reell automorphe Funktionen, in periodische Funktionen im älteren Sinne (additio automorphe Funktionen) und in die Funktionen der regulären Körper.“

So viel zur Orientierung auf diesem Gebiet. Nun müssen wir noch eine letzte Frage betreffend die Geometrie auf der Kugel beantworten, wobei wir dann aber wieder den Gesamtbaum mit in Betracht ziehen wollen, d. h. die Collineationen dieses Raumes, welche die Kugel in sich verwandeln. Wir fragen uns, was bedeutet eigentlich die einzelne Substitution $\lambda' = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta}$ auf der Kugel, und was für eine Art Bewegung des nicht Euklidischen Raumes, dessen Fundamentalfäche unsere Kugel ist, ist hierdurch gegeben? Wir haben früher gesehen, wenn man eine Fläche 2^{ten} Grades in sich transformiert, (so zwar, daß die erzeugenden Schaaren nicht wechseln), so bleibt allemal ein Tangentialtetraeder fest. Da nun ein Tangential.

Tetraeder bei der Kugel immer 2 und nur 2 reelle Ecken auf der Kugel hat, indem die in ihnen zu konstruierenden Tangentialebenen sich außerhalb der Kugel schneiden, so haben wir den Satz:
„Auf der Kugel werden bei jeder Bewegung all-
 gemein zu reden 2 reelle Punkte festbleiben.“

Die reelle Linie alsdann, welche die genannten beiden reellen Punkte verbindet, wird dann bei der Bewegung des Raumes in sich verschoben werden (so daß ihre Schnittpunkte mit der Kugel festbleiben), während der Raum sich um sie dreht; uns interessiert hierbei vom Standpunkte der Nicht-Euklidischen Geometrie aus besonders das Stück der Linie im Innern der Kugel. Diese Nicht-euklidische Bewegung nennt man eine Schraubenbewegung; bei ihr fungiert die Verbindungslinie der beiden festbleibenden Punkte als Schraubenaxe.

Fig. 30.



Wir setzen nun, um die festbleibenden Punkte direkt zu bestimmen, in

$$\lambda' = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta} \quad \lambda' = \lambda, \text{ so folgt:}$$

$$\gamma\lambda^2 + (\delta - \alpha)\lambda - \beta = 0.$$

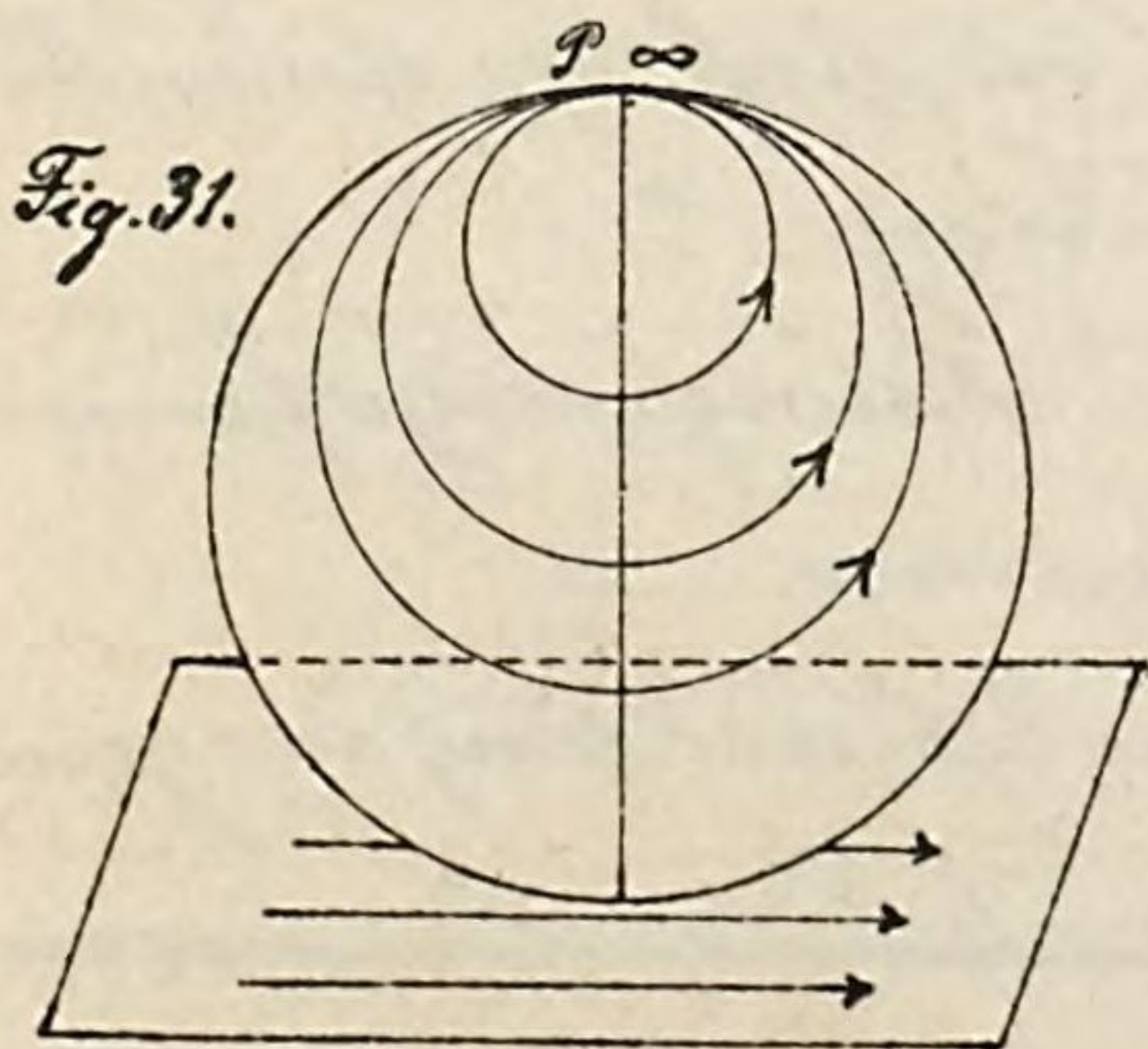
Dies liefert uns die Werthe:

$$\lambda = \frac{\alpha - \delta \pm \sqrt{(\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma}}{2\gamma} \quad \text{für die beiden fest-
bleibenden Punkte.}$$

Wir haben hier *) zunächst zu unterscheiden, ob die Quadratwurzel gleich null wird oder nicht. Wir kommen weiterhin zu den verschiedenen Arten der Substitution, wie sie beispielsweise in den „Vorlesungen über Modulfunktionen“ (Leipzig 1890) pag. 163 ff. ausführlich betrachtet werden.

Dort wird unterschieden zwischen der parabolischen, elliptischen, hyperbolischen und loxodromischen Substitution. Die parabolische Substitution ist eben durch das Verschwinden des Wurzelausdrucks $(\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma$ definiert, bei ihr fallen die beiden festbleibenden Punkte zusammen.

Wählen wir im Falle der parabolischen Substitution den festbleibenden Punkt zum Unendlichkeitspunkt, ($\lambda = \infty$), so können wir die Substitutionen, um welche es sich handelt, allemal auf die kanonische Form bringen:

$$\lambda' = \lambda + \beta.$$


Wenn wir dann in gewöhnlicher Weise die Kugel auf die Ebene stereographisch projizieren

*) indem wir jetzt in die Einzeldiscussion eintreten.

(v. Figur), so handelt es sich in der Ebene um eine einfache Parallelverschiebung, wie sie durch die Gleichung gegeben ist:

$x' + iy' = x + iy + (b + ic)$. Was bedeutet dies dann auf der Kugel?

„Dem Umstande entsprechend, daß ein System paralleler gerader Linien der gewöhnlichen Ebene sich in sich selbst verschiebt, verschieben sich auf der Kugel lauter Kreise in sich selbst. (v. Fig. 31), die sich in dem festbleibenden Punkte berühren.“

Wir ziehen jetzt die zugehörige Collineation des Gesamtraumes in Betracht und finden in dieser Hinsicht:

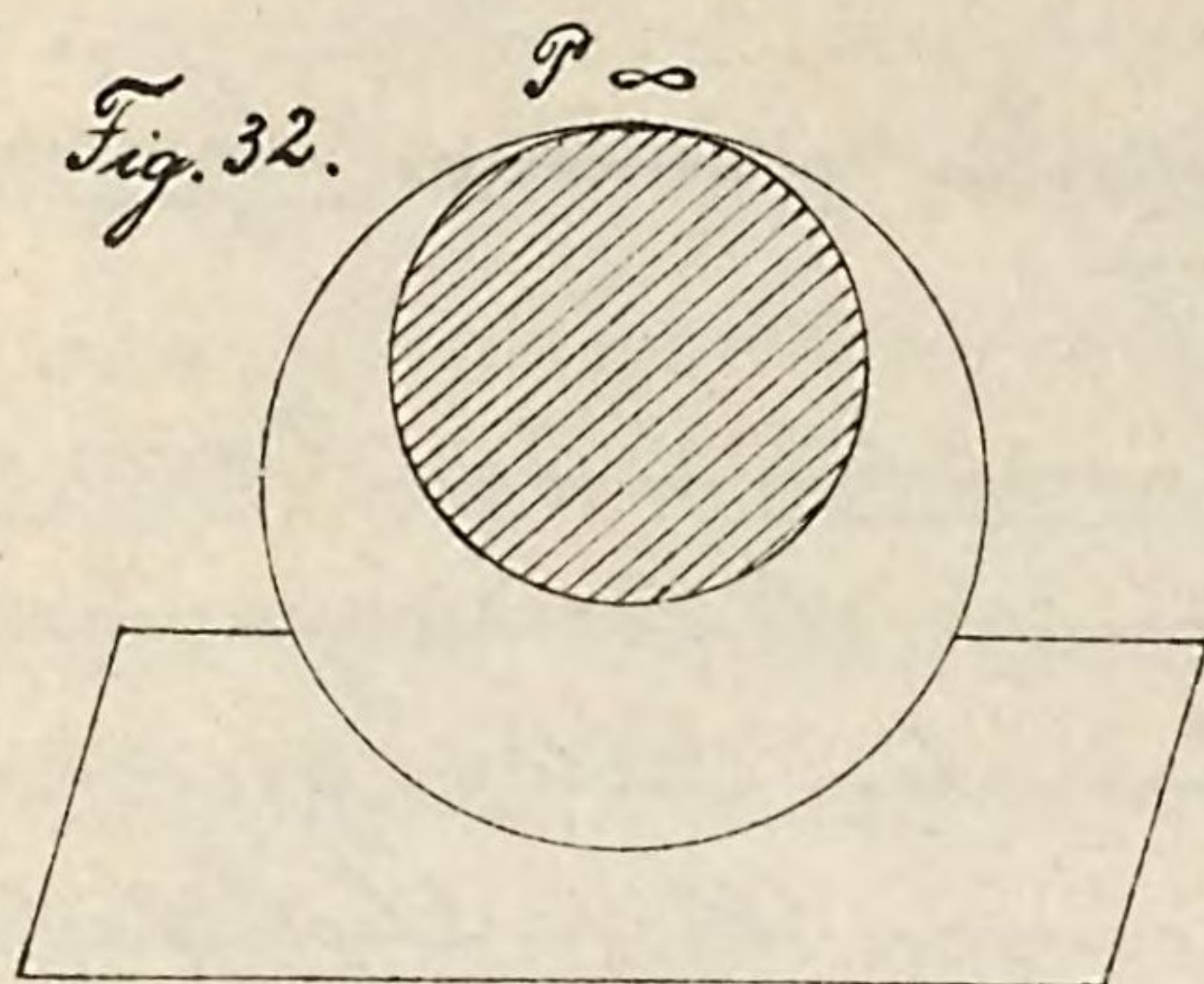
„Innerhalb jeder durch einen solchen Kreis der Kugel hindurch gelegten Ebene durchläuft dabei jeder Punkt des Raumes einen bestimmten Horocycclus*) der zugehörigen nicht-Euklidischen Maassbestimmung und alle Horocyclen, die von den verschiedenen Raumpunkten so durchlaufen werden, werden wir als parallel bezeichnen dürfen, weil sie sich in demselben Punkte der absoluten Kugel berühren.“

Dies also wäre die „parabolische“ Bewegungsform unseres Nicht-Euklidischen Raumes. —

Wir haben jetzt weiter den Fall zu betrachten, wo zwei getrennte Wurzeln:

*) v. die Wintervorlesung.

$$\left. \begin{matrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{matrix} \right\} = \frac{(\alpha - \delta) \pm \sqrt{(\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma}}{2\gamma}$$

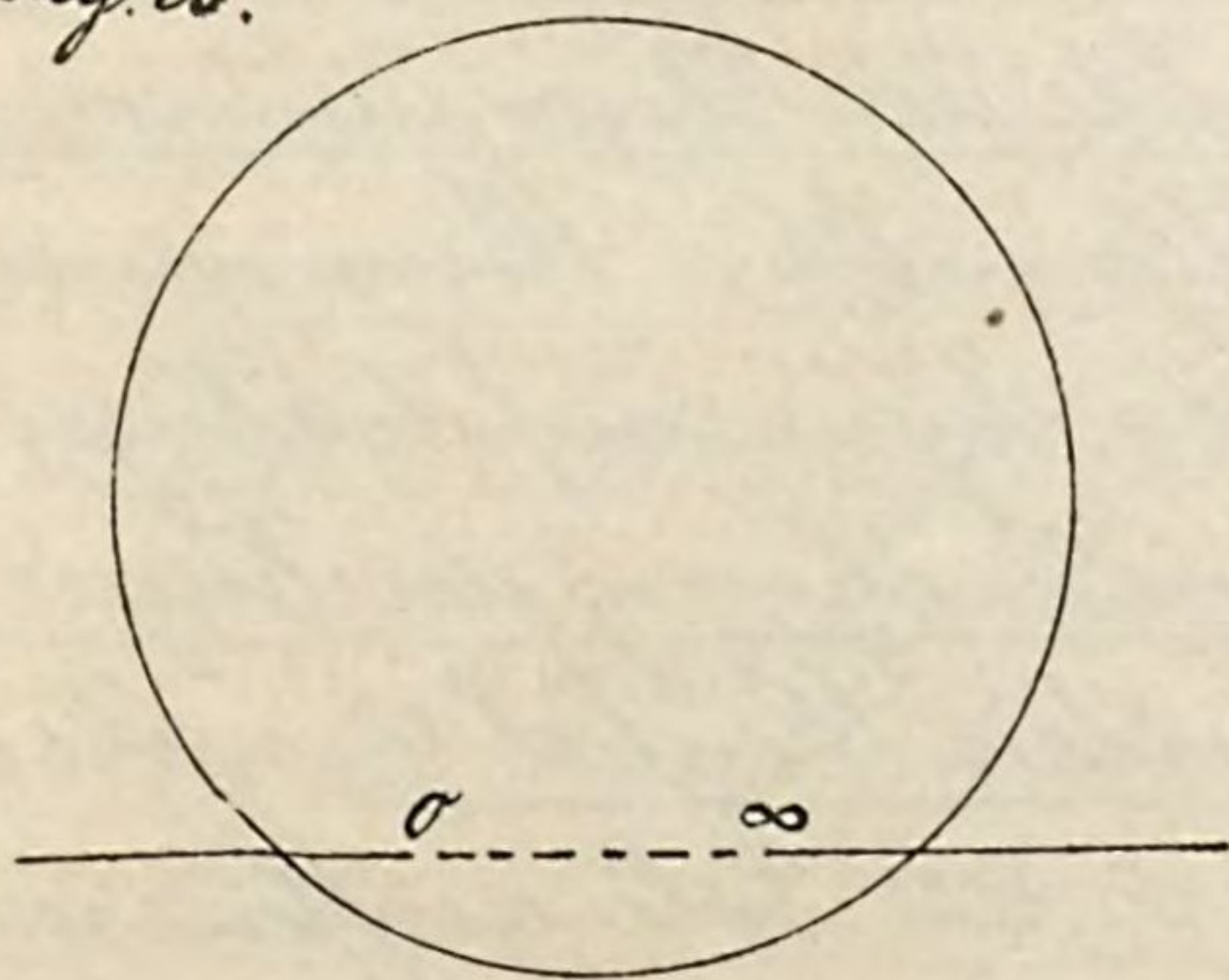


für die bei der Substitution: $\lambda' = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta}$ festbleibenden Punkte sich ergeben. Es steht dann offenbar nichts im Wege, auf der Kugel ein neues Coordinatensystem einzuführen,

der Art, daß der 0- und der ∞ -Punkt in die festbleibenden Punkte zu liegen kommen. Die lineare Substitution nimmt dann die kanonische Form an: $\lambda' = k \cdot \lambda$. Durch einfache Ausrechnung ergibt sich alsdann für k der Werth:

$$k = \frac{(\alpha + \delta \mp \sqrt{(\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma})^2}{4 \cdot (\alpha\delta - \beta\gamma)}.$$

Fig. 33.



Die weitere Eintheilung dieser allgemeinen Substitution $\lambda' = k \cdot \lambda$ erfolgt nun nach dem Werthe, den die Konstante k annimmt. Wir haben 3 Fälle zu unterscheiden:

1.) Es habe k den Werth $e^{i\varphi} = \cos. \varphi + i \sin. \varphi$, d. h. sei $|k| = 1$. Dies ist der Fall der elliptischen Substitutionen.

2.) Es sei k reell. Dann reden wir von hyperbolischer Substitution.

3.) Es möge k beliebig komplex sein. Dieser allgemeinste Fall tritt für unser Interesse zurück, da wir ihn aus den beiden ersten Fällen zusammensetzen können. Wir nennen diese Substitution die loxodromische.

Wir können uns diese Substitutionen nun wieder klar machen, wenn wir unser λ zunächst wieder in der Ebene deuten und die hier sich darbietenden Verhältnisse dann auf die Kugel in bekannter Weise übertragen. Wir gehen unsere drei Fälle einzeln durch:

1.) Im ersten Falle war gesetzt: $\lambda' = e^{i\varphi} \cdot \lambda$. In der Ebene bedeutet diese Substitution eine Drehung derselben; „die Trajektorien d. h. die Bahncurven der einzelnen Punkte der Ebene sind concentrische Kreise um den Nullpunkt.“ Wenn wir dies nun in gewöhnlicher Weise (v. Figur) auf die Kugel übertragen, so haben wir eine Drehung der Kugel um den Durchmesser $O\infty$ um den Winkel φ , wobei, wenn wir die Punkte O, ∞ als Pole auffassen, die

Breitenkreise die Trajektorien der einzelnen Kugelpunkte vorstellen. Dies übertragen wir nun leicht auf den Fall, wo die Punkte O und ∞ eine beliebige Lage auf der Kugel besitzen. Wir sehen sofort, was aus den Breitenkreisen wird, wenn wir uns erinnern, daß diese durch Ebenen ausgeschnitten werden, die durch die unendlich weite Gerade der Horizontalebene, d. h. durch die konjugierte Polare des Durchmessers $O\infty$ hindurchgehen.

An Stelle dieser Breitenkreise treten in unserem allgemeinen Fall dann diejenigen Kreise der Kugel, welche von Ebenen ausgeschnitten werden, die durch die konjugierte Polare der jedesmaligen Axe $O\infty$ hindurchgehen.

(Die konjugierte Polare der Axe $O\infty$ erhält man bekanntlich als Schnittgerade der beiden Tangentialebenen in den Punkten $O\infty$).

An Stelle der Meridiane treten diejenigen Kreise der Kugel, deren Ebenen durch die Axe $O\infty$ selbst hindurchlaufen. Die Bewegung der einzelnen Kugelpunkte ist hiernach folgende:

„Jeder Punkt der Kugel rückt unserer Substitution entsprechend auf dem durch ihn hindurchgehenden Breitenkreise ein solches Stück fort, daß der durch ihn hindurchgehende Meri-

lian um den Winkel φ gedreht erscheint.
(vgl. die beiden Figuren.).

Fig. 34.

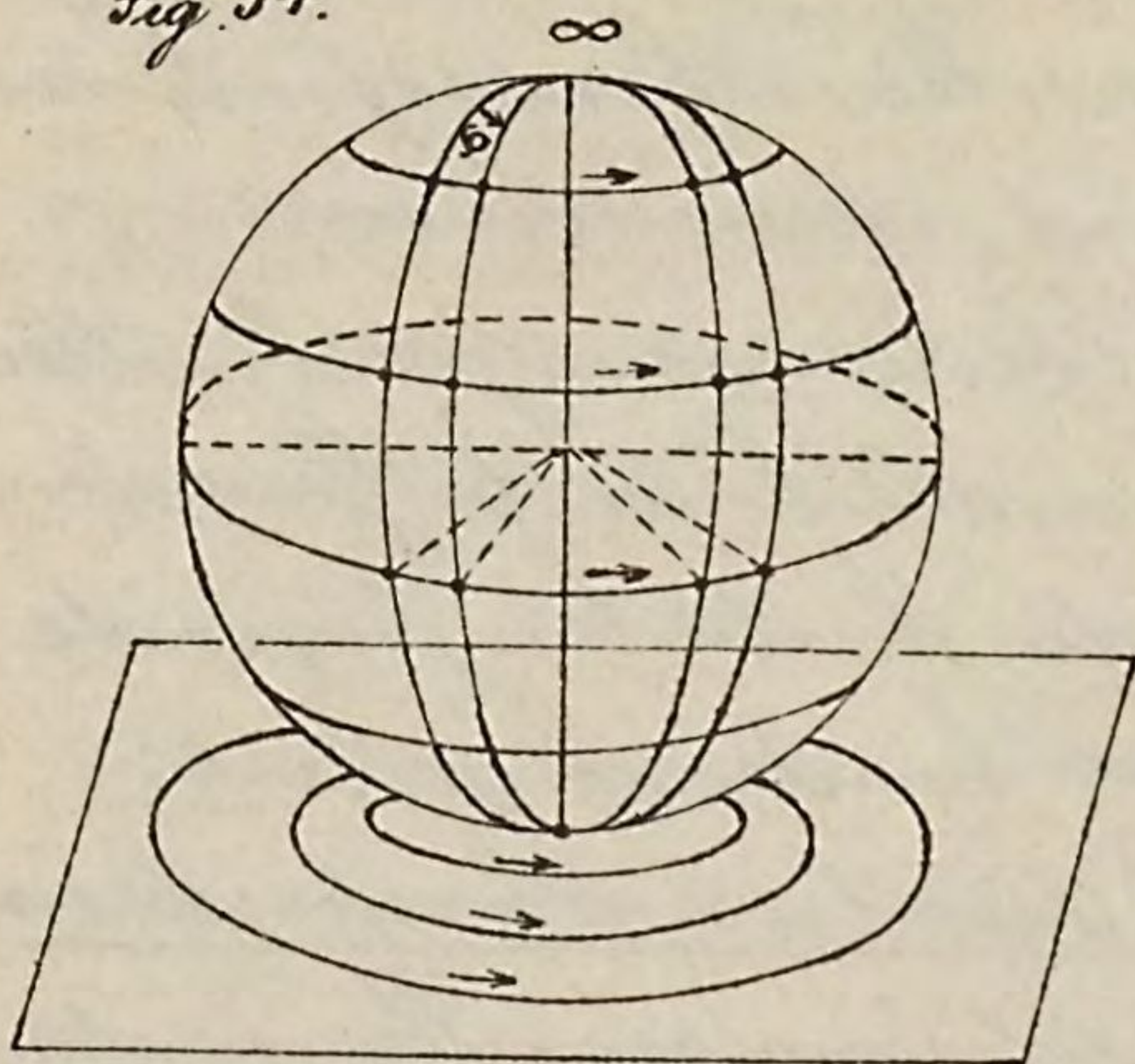
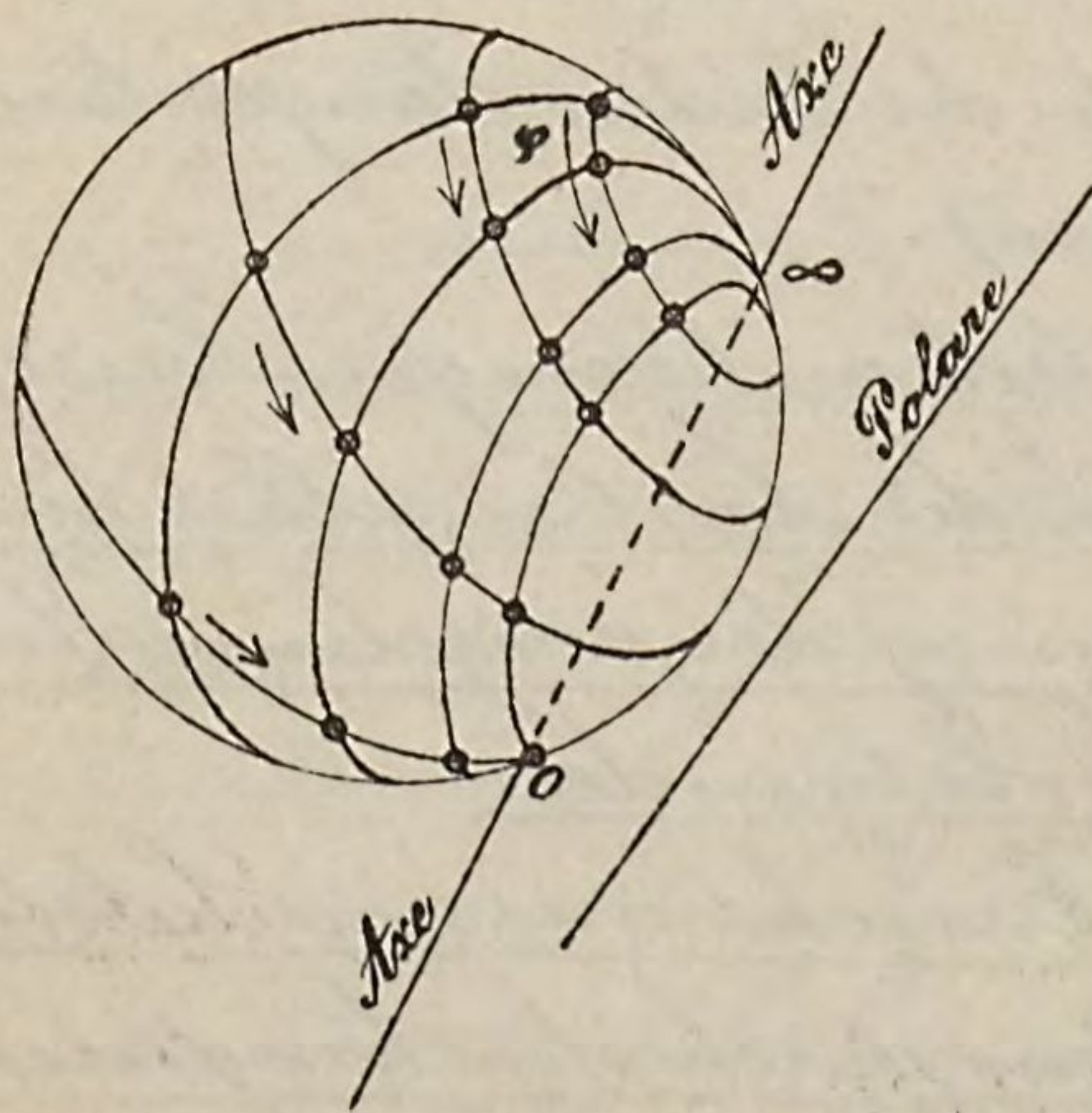


Fig. 25.



Was für eine Bewegung des Gesamtraumes tritt nun gleichzeitig hier ein? Wir denken uns, wie in letzter Vorlesung, eine Kugelkante abgeschnitten längs eines Trajektorienkreises.

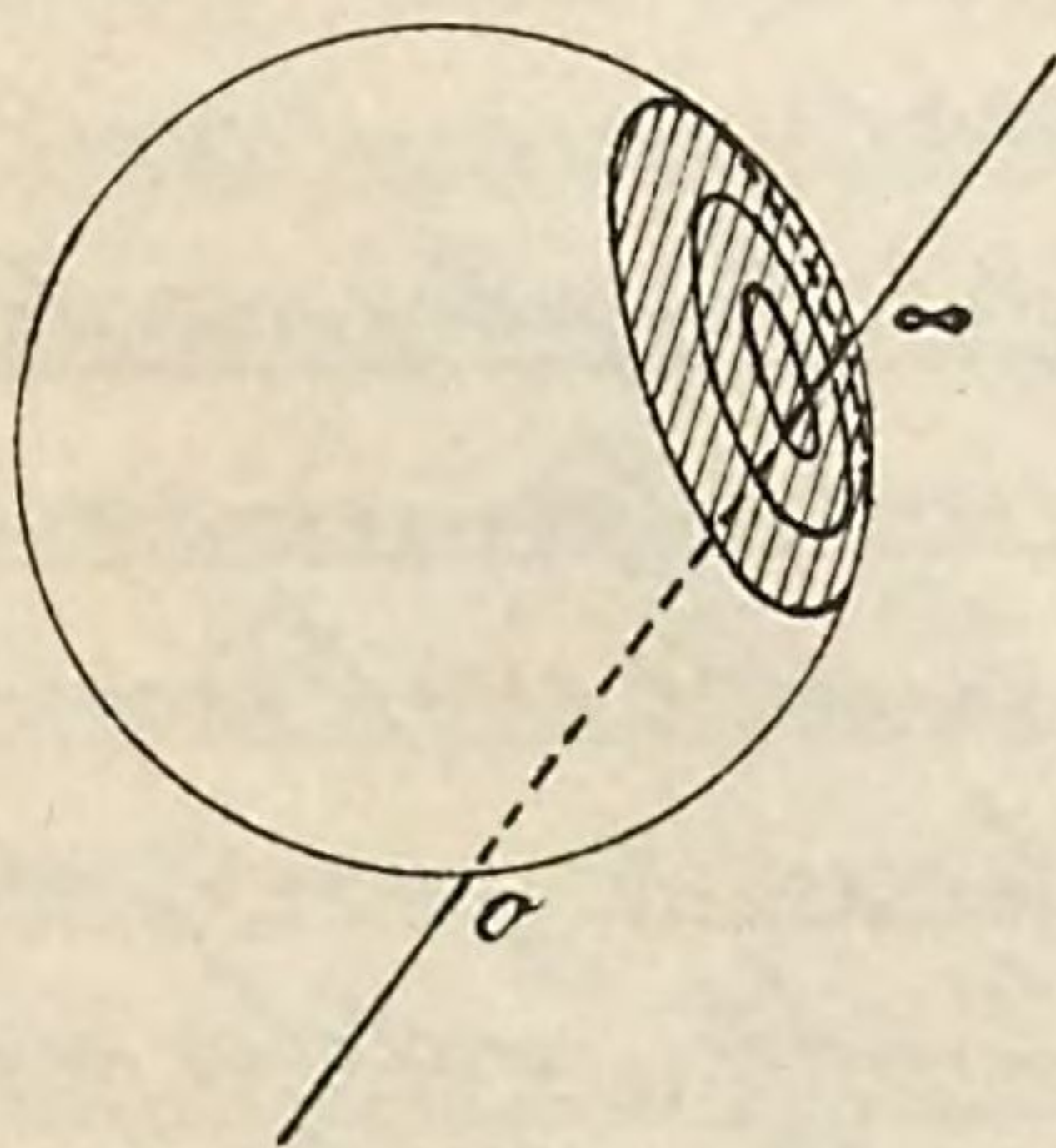
In der Ebene, die wir durch Schraffierung hervorgehoben haben, verschiebt sich dann offenbar der Trajektorienkreis in sich, während der Punkt im Innern, in welchem die Axe $O \infty$ die Ebene durchsetzt, fest bleibt (Fig. 36).

Eine solche Collineation der Ebene in sich ist uns aber bereits bekannt vom Wintersemester her, sofern wir den Trajektorienkreis als absoluten Kegelschnitt ansehen, wir wissen, welche

Curve jeder Punkt der Ebene hierbei beschreibt, nämlich einen nicht-euklidischen Kreis. Wir wollen die der Art sich ergebende nicht-euklidische Bewegung als Rotation des Raumes um eine Axe bezeichnen. Wir haben daher als Schlussergebnis zusammengefaßt:

„Die einer elliptischen Substitution von λ entsprechende nicht-euklidische Bewegung ist eine Rotation des Raumes um die das Kugelmittre durchsetzende Axe ∞O , bei welcher jeder Punkt der Axe festbleibt und jeder andere Raumpunkt

Fig. 36.



einen Kreis (im nicht-euklidischen Sinne) beschreibt, welcher in derjenigen Ebene liegt, die durch ihn (den Raumpunkt) und die Polare der Axe hindurchgeht“

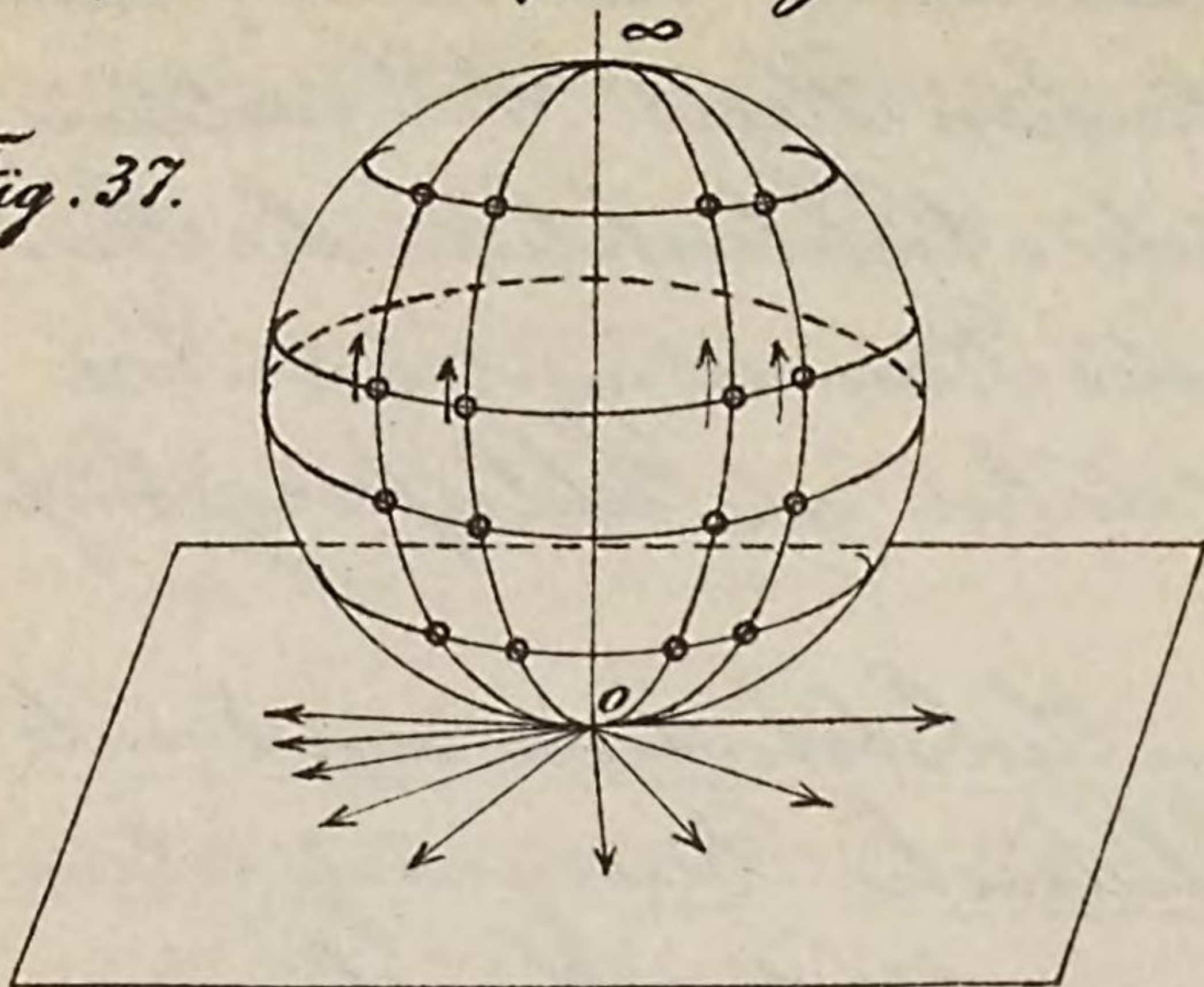
2.) Wir gehen nun zur hyperbolischen Substitution über:

$$\lambda' = k \cdot \lambda, \text{ wo } k \text{ reell ist.}$$

In der λ -Ebene haben wir hier einfach eine Ähnlichkeitstransformation, bei welcher die Ebene vom Coordinatenausgangspunkt als festem Punkt aus

auf das k -fache gestreckt wird."

Fig. 37.

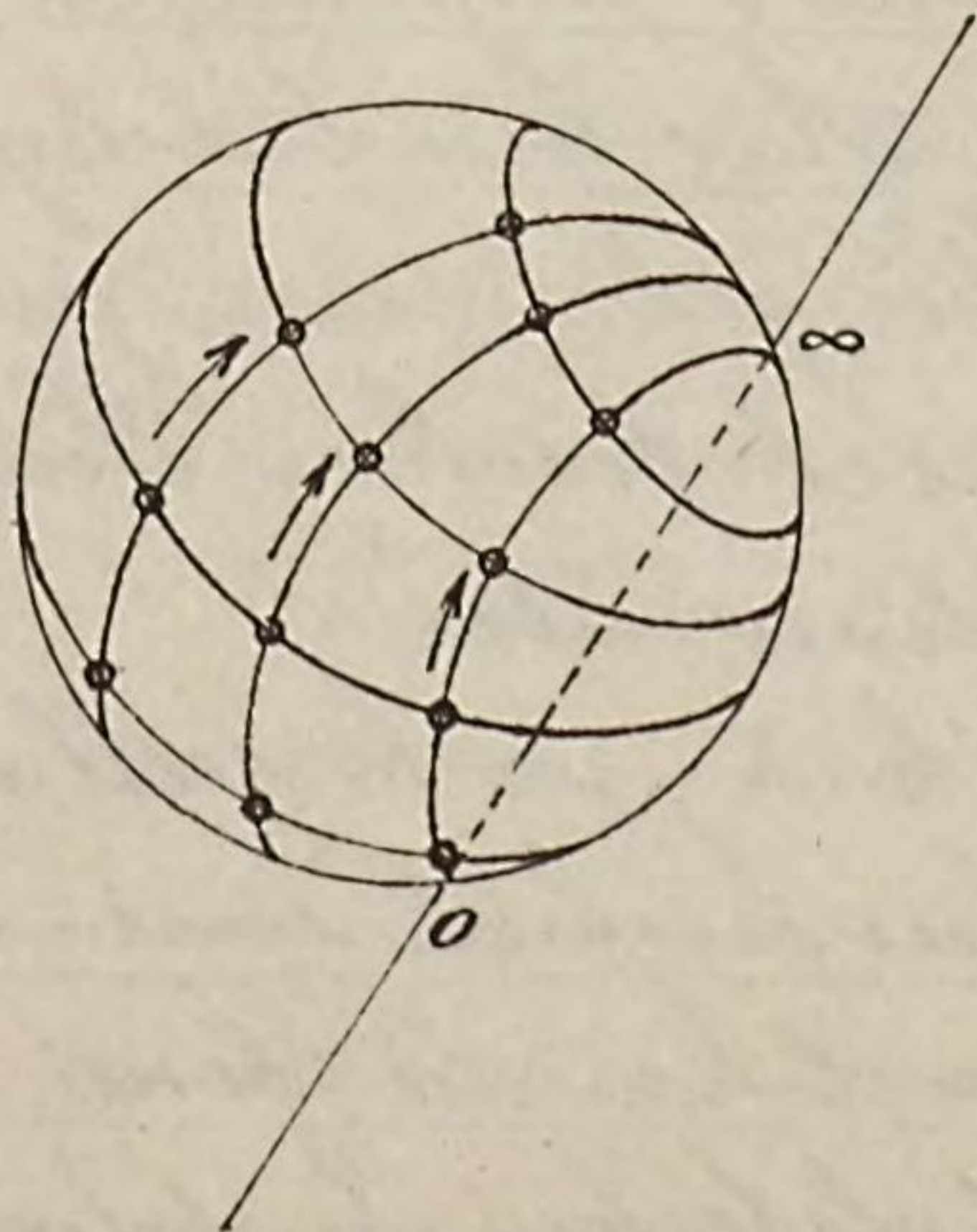


Dies besagt, daß auf der Kugel jeder Punkt auf dem durch ihn gehenden Meridian vorrückt, jedoch so, daß alle Punkte, welche vorher auf einem Breitenkreise liegen, auch

nachher auf einem solchen liegen."

Dies können wir sofort auf den Fall der allgemeinen Lage der Punkte 0 ∞ auf der Kugel übertragen. Wenn wir auch hier in leicht verständlicher Weise die Beziehungen „Meridian“ und „Breitenkreis“ anwenden, so erkennen wir:

Fig. 38.



Auf der Kugel wandert auch im allgemeinen Fall jeder Punkt auf einem Meridian, so zwar, daß die Punkte, welche auf einem Breitenkreise liegen, auch später auf einem Breitenkreise liegen."

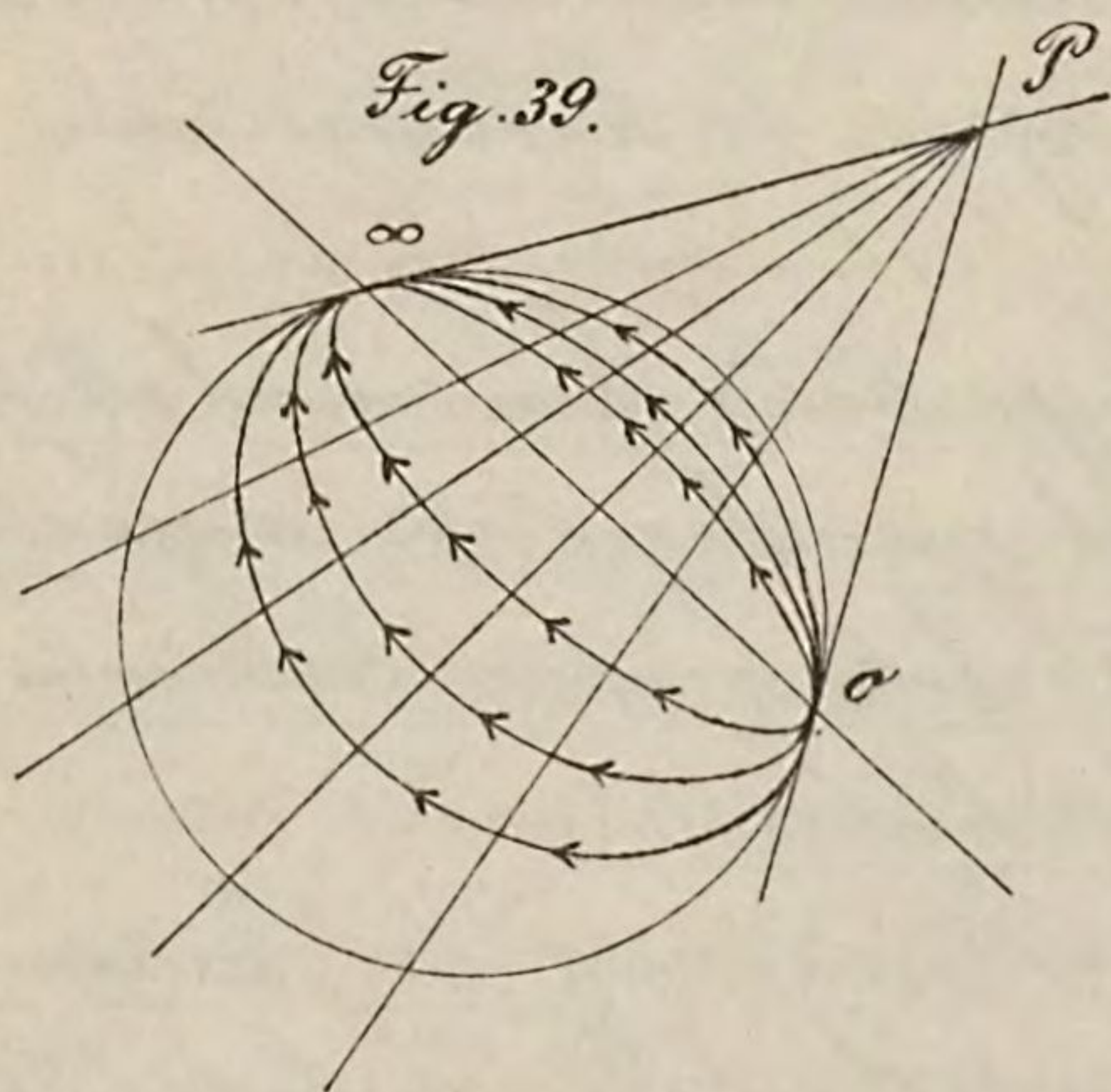
(Vgl. wieder die Figuren!).

Vergleichen wir diese Sätze mit denen der elliptischen Substitution, so sehen wir, daß die Bezeichnungen Breitenkreise und Meridiane ihre Rolle gewechselt haben. Da diese Linien auf der Kugel beziehungsweise in Ebenen durch die Axe $O \infty$ oder ihre conjugierte Polare liegen, so können wir auch sagen:

„Der Unterschied der hyperbolischen und elliptischen Substitution ist geradezu der, daß die Axe und die conjugierte Polare ihre Bedeutung mit einander vertauscht haben.“

Wie stellt sich nun die Bewegung des Gesamtraumes im Fall der hyperbolischen Substitution dar? Denken wir uns einmal eine Meridianebene für sich gezeichnet. (vgl. Fig. 39) — in der Figur verläuft die conjugierte Polare durch P senkrecht zur Zeichnung —, so erkennen wir, daß bei der nicht-Euklidischen Bewegung dieser Ebene in sich der Meridiankreis als solcher unverändert bleibt, seine Punkte jedoch vom Punkte O aus nach dem Punkte ∞ oder umgekehrt sich verschieben, und daher die durch P laufenden Strahlen eine entsprechende Drehung erleiden. Jeder Punkt der Ebene bewegt sich hierbei, wie wir vom letzten Wintersemester

her wissen, auf einem nicht-Euklidischen Kreise, dessen „idealer“ Mittelpunkt in P liegt und welcher daher den Meridiankreis in den Punkten 0 und ∞ berührt.



Wir haben daher
allgemein eine nicht-
Euklidische Bewegung,
bei welcher jede Meridian-
ebene sich in sich selbst
verschiebt, so zwar, daß
jeder Punkt des Raumes
in seiner Meridianebene
eine zur Axe aequidist.

ante Curve beschreibt. *)

3.) Wir sprechen jetzt noch kurz von dem Fall, wo k einen beliebig complexen Werth besitzt.

Wir setzen $k = k_0 \cdot e^{i\varphi}$ und erkennen sofort:

Dem Umstande entsprechend, daß jede complexe
Zahl in die Gestalt gesetzt werden kann:

$k_0 \cdot e^{i\varphi}$, wo k_0 reell ist, läßt sich der allgemeine
Fall durch eine Stufenabfolge einer ellip-
sischen und einer hyperbolischen Substitution
ersetzen."

*) Denn jene nicht-Euklidischen Kreise (Fig. 39) können wir als „aequidistante“ Curven zur Axe 0∞ charakterisieren.

Doch können wir uns auch klar machen, welche Bewegung der Kugelpunkte und weiterhin der Raumpunkte allgemein sich ergibt, wenn wir die Ebene, in der wir λ deuten, gleichzeitig drehen und sich um den Nullpunkt ausdehnen lassen. *) Dann beschreiben sämtliche Punkte logarithmische Spiralen um den Nullpunkt als asymptotischen Punkt (indem diese Curven ja die Eigenschaft haben, die von dem Nullpunkt auslaufenden Strahlen unter gleichem Winkel zu schneiden (v. die Figur 39 in den „Modulfunktionen“ pag. 168)).

„Dem in der Ebene geschilderten Vorgänge entsprechend bewegt sich die Kugel dann so, wohl im speciellen wie im allgemeinen Falle so in sich selbst, daß jeder ihrer Punkte eine Loxodrome d. h. eine isogonale Trajektorie der Meridiane von einem gewissen Steigungswinkel beschreibt, während alle Punkte, die anfänglich auf einem Breitenkreise bezw. Meridiane liegen, auch später auf einem Breitenkreise bezw. Meridian liegen. Hieraus erklärt sich dann auch die Benennung „loxodromische Substitution.“

*) Die strenge Formel dieser Bewegung wird durch $\lambda' = k \eta \cdot \lambda$ gegeben, wo η von 0 bis 1 variiert.

„Was nun die zugehörige nicht-Euklidische Bewe-
gung des Gesamtraumes anbetrifft, so ist die,
selbe eine Schraubenbewegung des Raumes um
seine Axe, bei welcher die Trajektorie jedes Punk-
tes sich mit ∞ vielen Windungen an die beiden
Punkte 0 und ∞ heranzieht.“

Dies sind also die verschiedenen Bewegungs-
formen, welche durch die Substitution $\lambda' = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta}$
definiert sind. Zusammenfassend werden wir
sagen können:

„Jede Bewegung ist eine Schraubenbewegung,
die insbesondere in eine Rotation oder eine Ver-
schiebung längs der Axe ausarten kann (ellip-
tischer u. hyperbolischer Fall), wo übrigens auch
die Axe unendlich weit vorrücken kann, so
daß sie zur Tangente der Kugel wird (para-
bolischer Fall).“

Anmerkung:

Was die Wahl der Bezeichnungen „elliptisch,
hyperbolisch, parabolisch“ anbetrifft, so beziehen
sie sich darauf: Wenn wir allein die reellen
Werthe von λ in der in der projektiven Geometrie
üblichen Weise auf einer Geraden deuten, so
werden diejenigen Substitutionen von λ ,
welche eine reelle elliptische, hyperbolische, para-

bolische Maafbestimmung, die wir auf der Δ -Axe festlegen mögen, unverändert lassen, gerade sol. che sein, welche wir entsprechend elliptisch, hy. perbolisch, parabolisch genannt haben.

Wir beginnen das letzte Kapitel unserer Vor. lesung, das sich mit der

Nicht-Euklidischen Geometrie im speciellen beschäftigen soll. Wir haben ja schon manches vorweg behandelt; es würde sich jetzt darum handeln, dies im Zusammenhange übersichtlich darzustellen.

Wir fragen uns zunächst:

„Wie ordnet sich die gewöhnliche Metrik des Raumes von 3 Dimensionen in das System der projektiven Geometrie ein? *)“

Es seien mit x, y, z, t rechtwinklige homogene Punktkoordinaten, mit u, v, w, w rechtwinkl. lige homogene Ebenenkoordinaten dargestellt.

*) wobei wir uns aber auf ganz wenige kurzgefaßte Aussagen beschränken, da alles Wesentliche im Wintersemester bereits hinreichend ausführlich gegeben ist.

Es beruht das Wissen der metrischen Geometrie vom projektiven Standpunkte aus aufgefasst nur darin, daß es im Raume einen bestimmten Kegelschnitt, den sogenannten Kugelkreis giebt, auf den sich die metrischen Beziehungen gründen.

Es ist die Gleichung einer Kugel in gewöhnlichen rechtwinkligen Coordinaten allgemein gegeben durch:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2Ax + 2By + 2Cz + D = 0 \text{ oder}$$

homogen geschrieben:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2Axt + 2Byt + 2Czt + Dt^2 = 0.$$

Setzen wir nun $t = 0$, d. h. schneiden wir die Kugel durch die ∞ ferne Ebene, so erhalten wir die Schnittkurve als $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, $t = 0$. Den hierdurch definierten Kegelschnitt nennen wir schlechtweg den Kugelkreis (es ist natürlich ein nulltheiliger Kegelschnitt) und zwar auf Grund des durch unsere Formeln bewiesenen Satzes.

„Alle Kugeln des Raumes haben mit der ∞ fernen Ebene denselben nulltheiligen Kegelschnitt gemeinsam und sind eben hierdurch als Kugeln definiert.“

Es wird nun zu erläutern sein, daß in der That alle metrischen Beziehungen irgend welcher

räumlichen Figuren innerhalb der gewöhnlichen Euklidischen Geometrie projektive Beziehungen der Figur zum Kugelkreis sind. Wir sprechen zu- nächst von der Maßbestimmung in den binären Gebieten, als welche wir die Punktreihe, das Ebenen- büschel und das Strahlbüschel annehmen haben, und zwar wollen wir uns dabei, wenigstens in der Hauptsache, auf reelle binäre Gebiete beschränken.

1. Zwei Punkte einer Punktreihe haben einen Abstand r , welcher sich in den Coordinaten ausdrückt als:

$$r = \frac{\sqrt{(xt' - x't)^2 + (yt' - y't)^2 + (zt' - z't)^2}}{t \cdot t'}$$

In dieser Formel, wollen wir bemerken, kommen nur Ausdrücke vor, die direkt zu dem Kugelkreis in Beziehung stehen. So ist $t=0$ die ∞ ferne Ebene, welche den Kugelkreis enthält;

$(xt' - x't)^2 + (yt' - y't)^2 + (zt' - z't)^2 = 0$ dagegen ist die Gleichung des Kegels, der von dem Punkte x, y, z, t in laufenden Coordinaten x', y', z', t' nach dem Kugelkreis sich hinerstreckt.

Der Ausdruck für r ist hiernach eine simultane Invariante der beiden Punkte und des Kugelkreises.

Kann wird nun $r=0$ sein? Natürlich

dann, wenn der Fähler verschwindet, d. h. wenn die beiden Punkte verbunden eine imaginäre Gerade liefern, die den Kugelkreis trifft, oder anders ausgedrückt:

„Zwei Punkte haben einen verschwindenden Abstand, wenn sie auf einer Minimalgeraden liegen.“ Fragen wir uns noch, wie weit die Punkte des Kugelkreises von irgend einem Raumpunkte entfernt sind, so bekommen wir als Antwort: $r = 0$, d. h.

„Die Punkte des Kugelkreises sind unbestimmt weit von einem beliebigen Raumpunkte entfernt.“

2.) Wir betrachten weiter das Ebenenbüschel.

Der den Krassbestimmungen zu Grunde liegende Kugelkreis ist in Ebenencoordinaten gegeben durch:

$u^2 + v^2 + w^2 = 0$, wo u, v, w die Coordinaten einer beliebigen Tangentialebene des Kugelkreises sind.

Der Winkel φ , welchen zwei Ebenen u, v, w und u', v', w' des Büschels mit einander bilden, ist nun gemäß den Betrachtungen der Wintervorlesung gegeben durch:

$$\varphi = \text{arc. cos. } \frac{uu' + vv' + ww'}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \sqrt{u'^2 + v'^2 + w'^2}} \quad \text{oder}$$

$$= \arcsin \frac{\sqrt{(vw' - v'w)^2 + (wu' - w'u)^2 + (uv' - u'v)^2}}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \sqrt{u'^2 + v'^2 + w'^2}}$$

oder $= \frac{i}{2} \log. DV$, wo DV das Doppelverhältniß ist, welches unsere beiden Ebenen mit den beiden durch ihre Schnittlinie gehenden Minimalebene (d. h. den Tangentialebenen an den Kugelkreis) bilden.

Von der Maafbestimmung im Strahlbüschel wollen wir an dieser Stelle nicht weiter reden, sondern nur noch eine Bemerkung betr. die Punktreihe und das Ebenenbüschel hinzufügen. Die Punktreihe haben wir bisher im Endlichen genommen; es ergab sich dann eine parabolische Maafbestimmung. Eine unendlich weit liegende reelle Punktreihe unterliegt jedoch nicht der gewöhnlichen parabolischen, sondern einer elliptischen Maafbestimmung. Umgekehrt unterliegt ein reelles Ebenenbüschel, dessen Axe ∞ weit liegt, nicht der gewöhnlichen elliptischen, sondern der parabolischen Maafbestimmung.

Diese Betrachtungen beziehen sich alle auf die binären Gebiete unseres Raumes; in entsprechender Weise können wir auch von den ternären Gebieten reden. Es würde in Betracht kommen (indem wir uns wieder auf reelle Gebiete beschränken):

1.) die Ebene und zwar:

a. die gewöhnliche Ebene.

b. die unendlich weite Ebene.

2.) der Punkt (als Träger eines Ebenen- und Strahlenbündels) und zwar:

a. der gewöhnliche Punkt

b. der unendlich weite Punkt.

Was zunächst die Ebene angeht, so haben wir in der gewöhnlichen Ebene eine parabolische Maafsb., bestimmung, die sich auf die Kreisunkte in dieser Ebene gründet, in der unendlich fernen Ebene eine elliptische Maafsbestimmung bezüglich des Kugelkreises selbst.

Was nun den Punkt betrifft, so haben wir in einem gewöhnlichen (im Endlichen gelegenen) Punkte eine elliptische Maafsbestimmung bezüglich des zugehörigen Minimalkegels, d. h. des Kegels, der sich von dem Punkte aus nach dem Kugelkreise erstreckt, in einem unendlich weiten Punkt eine parabolische Maafsbestimmung in Bezug auf das an den Kugelkreis gehende Tangentenpaar. Alles dies war ja im letzten Winter besprochen.

Hierdurch ergibt sich nun eine Auffassung der metrischen Verhältnisse, welche für viele

geometrische Beziehungen außerordentlich nützlich ist. Wir können jedoch hier nicht im Einzelnen auf diese Beziehungen eingehen, wir wollen nur 3 Punkte kurz erwähnen.

1, Fragen wir uns einmal, was sind die Hauptachsen einer Fläche zweiten Grades und wie sind sie zu definieren?

Wir wissen, je zwei Flächen 2^{ten} Grades haben ein gemeinsames Polartetraeder. Wenn nun die eine der beiden Flächen zum Kugelkreise ausartet, dann geht das gemeinsame Polartetraeder gerade in das hier vorliegende Hauptaxentetraeder über, *) so daß also die Lehre von den Hauptachsen der Fläche 2^{ten} Grades als ein specieller Fall der allgemeinen Lehre von dem 2 Flächen 2^{ten} Grades gemeinsamen Polartetraeder erscheint."

2, Was sind konfocale Flächen 2^{ten} Grades?

Es sei eine Fläche zweiten Grades in Ebenen, coordinaten geschrieben:

$\Phi(u, v, w, \omega) = 0$. Wir nehmen den Kugelkreis

*) d. h. dasjenige Tetraeder, welches durch die Hauptachsen und die unendlich weite Ebene bestimmt ist.

$u^2 + v^2 + w^2 = 0$ hinzu als eine 2^{te} Fläche 2^{ten} Grades. Dann wird die Schaar der zu $\Phi(u, v, w, w) = 0$ konfocalen Flächen 2^{ten} Grades gegeben durch: $\Phi + \lambda(u^2 + v^2 + w^2) = 0$. Dies Resultat drückt man nun gewöhnlich geometrisch aus, indem man sagt:

„Konfocale Flächen 2^{ten} Grades sind solche, welche in dieselbe den Kugelkreis enthaltende Developpable eingeschrieben sind.“

[Näheres v. bei Salmon - Fiedler, anal. Geometrie d. Raumes I. Kap. IX. Dort wird man erkennen, wie nützlich es ist, die Theorie der konfocalen Flächen 2^{ten} Grades unter Bezugnahme auf den Kugelkreis zu entwickeln, indem eine große Zahl von Sätzen sich sehr einfach auf diese Weise ergeben].

3.) Doch auch die Theorie der höheren Flächen giebt uns Beispiele, welche Summe von Hilfsmitteln in der That die Heranziehung des Kugelkreises uns an die Hand giebt. Vgl. z. B. die Theorie der Minimalflächen von Lophus Lie, Ann. 14, 15.

Die Beziehungen zum Kugelkreise sind übrigens nicht nur bei rein geometrischen Fragen von Wichtigkeit, sondern ebensowohl bei gewissen Betrachtungen, die dem Gebiet der Mechanik an-

gehören. In dieser Hinsicht besprechen wir kurz:

- 1., Das Gebiet der Kinematik oder die Lehre von den Bewegungen.
- 2., Die Mechanik der freien Systeme.
- 3., Die Mechanik der starren Körper.

Wir wollen auf diese 3 Punkte einzeln näher eingehen.

- 1., Die Kinematik oder die Lehre von den Bewegungen.

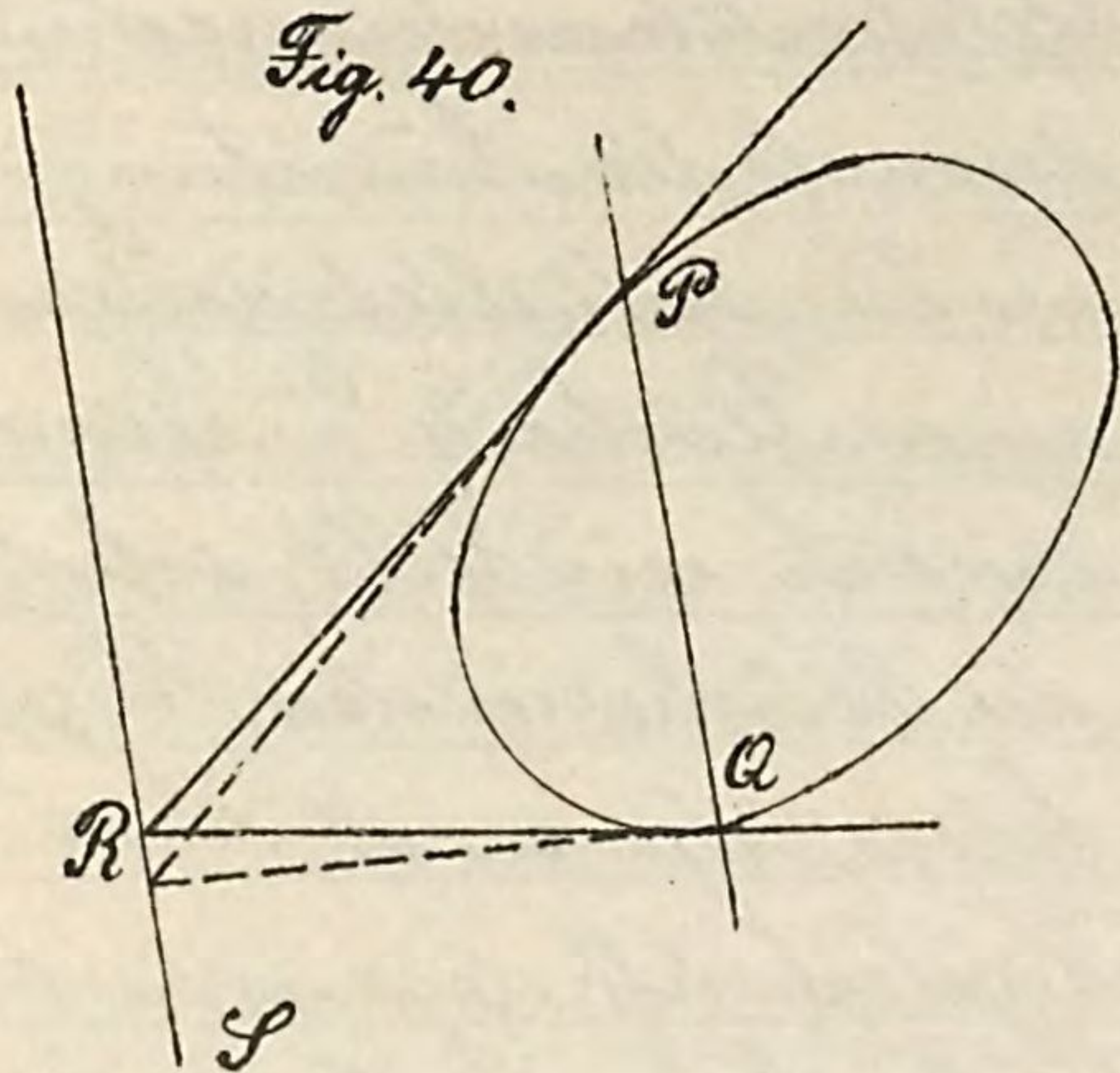
Wir haben ∞^6 Bewegungen im Euklidischen Raume. dieselben sind sämtlich darzustellen als Collineationen, die den Kugelskreis festlassen. Wir können jedoch nicht sagen, daß jede Collineation des Raumes, die den Kugelskreis in sich überführt, nun auch umgekehrt eine gewöhnliche Bewegung des Raumes darstellt. Es sind unter diesen Collineationen noch die Ähnlichkeitstransformationen enthalten, d. h. diejenigen Collineationen, bei denen zwar die Winkel erhalten bleiben, doch die Strecken in Multipla ihrer selbst übergehen (Bei der nicht-Euklidischen Geometrie kommen diese Ähnlichkeitstransformationen in Wegfall, wie wir gleich hier bemerken wollen). Der Fundamentalsatz

der Kinematik ist nun von Chasles 1829 ausgesprochen in dem Bulletin de Férussac. Dort hat er den Satz aufgestellt:

Jede Bewegung (des Eukl. Raumes) ist eine "Schraubenbewegung."

Wie haben wir dies von unserem projektiven Standpunkte aus aufzufassen? Bei jeder Collineation muß, wie wir wissen, ein Tetraeder fest bleiben, welches natürlich auch ausarten kann. Wo liegt nun dies Tetraeder bei unseren Bewegungen? Um diese Frage zu beantworten, denken wir uns etwa denjenigen Fall der nicht Euklidischen Geometrie herangezogen, bei dessen Bewegungen ein beliebiger eintheiliger Kegelschnitt in sich übergeht. Denken wir uns diesen eintheiligen Kegelschnitt gezeichnet der also dem Kreis der unendlich fernen Ebene entspricht, so werden bei der Collineation desselben in sich zwei Punkte (P u. Q) und die Tangenten in ihnen fest bleiben. Diese bestimmen als Schnittpunkt einen dritten festbleibenden Punkt R , der als Eckpunkt des im Raume festbleibenden Tetraeders doppelt zu zählen ist, und durch ihn geht die weitere Kante RS des festbleibenden Tetraeders hindurch.

Dies auf den Fall der Euklidischen Geometrie übertragen ergibt:



„Dasjenige Tetraeder, welches bei einer Bewegung des Euklidischen Raumes der allgemeinen Theorie der Collineationen zufolge festbleiben soll, ist so ausgeartet, daß 2 seiner Ecken in der ∞ fernen Ebene zusammenfallen, während ihre Verbindungs-

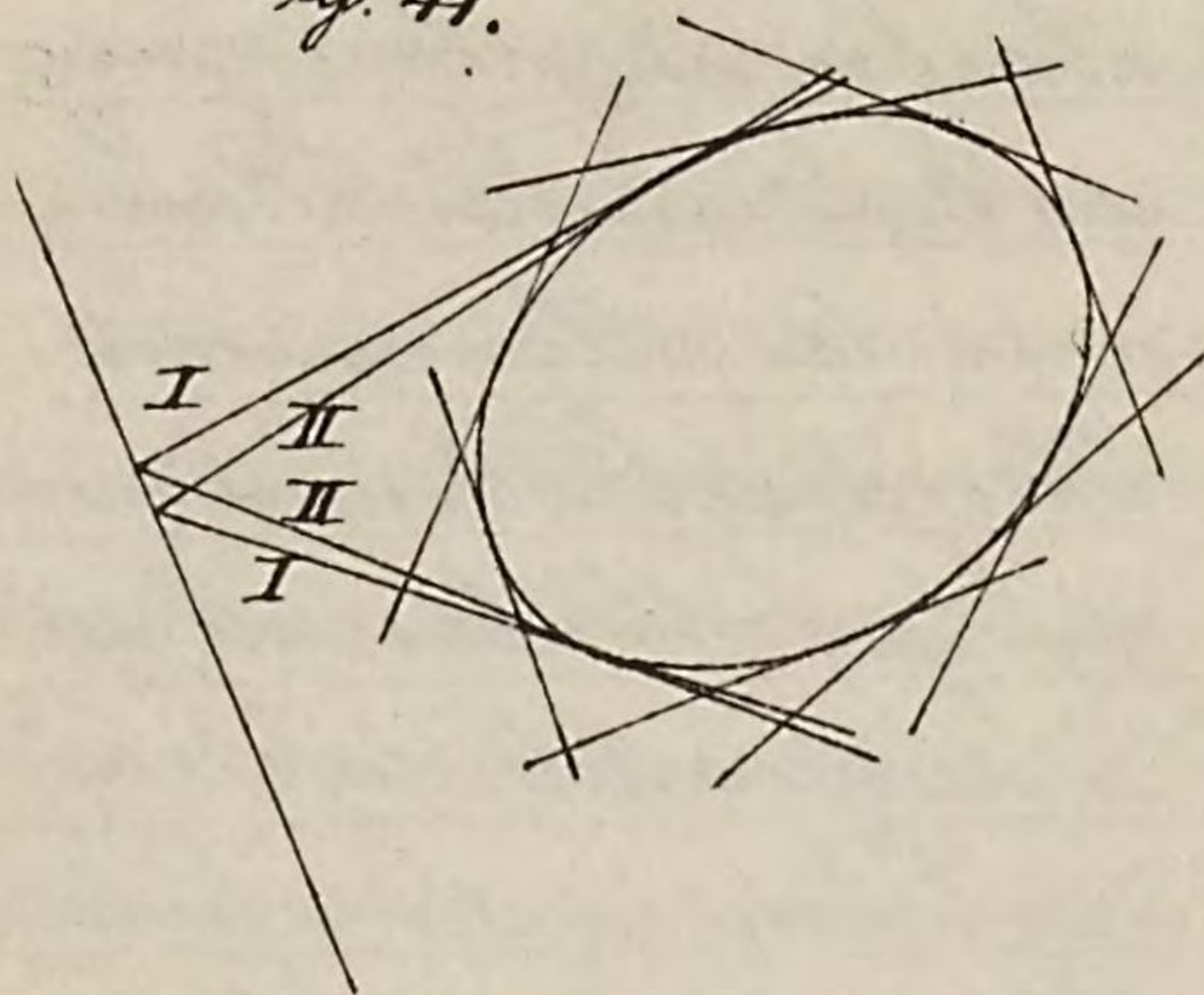
linie wohl bestimmt bleibt und die Schraubenaxe des Casles'schen Satzes abgibt.

„Die beiden anderen Ecken des Tetraeders sind die Berührungspunkte, welche die durch die Schraubenaxe hindurchgehenden Minimalebene mit dem Kugelschnitt gemein haben, und hierdurch sind dann die Kanten und Seitenflächen des Tetraeders völlig bestimmt.“

Denken wir uns anstatt des festbleibenden Kugelschnittes (in spec. des Kugelschnittes) zunächst ein sehr flaches Hyperboloid, so wird es bei diesem leicht sein, sich die Lage des bei einer Collineation des Raumes,

bei der die F_2 in sich übergeht, festbleibenden Tangentialtetraeders zu veranschaulichen.

Fig. 41.



„Unser in Fig. 40 dargestelltes Tetraeder erscheint dann als die Ausartung eines Tangentialtetraeders einer Fläche 2^{ten} Grades, die sich einstellt, sobald die Fläche in den Kugelschnitt oder sonst einen Kegelschnitt degeneriert.“

Wir haben der Betrachtung der Kinematik im Euklidischen Raume noch eine Bemerkung hinzuzufügen, die uns zugleich einen Einblick auf die Verhältnisse der nicht-Euklidischen Geometrie eröffnen wird. Im Euklidischen Raume können wir bekanntlich die Bewegungen zusammensetzen aus dreifach ∞ vielen Parallelverschiebungen, die alle unter einander vertauschbar sind, und aus dreifach ∞ vielen Drehungen um einen festen Punkt O . Diese Zerlegung der ∞^6 Bewegungen ist jedoch im nicht-Euklidischen Raume nicht ausführbar, eben weil es keine Parallelverschiebungen und überhaupt keine dreifach unendlich vielen vertauschbaren Bewegungen giebt.

Dies erklärt die besondere Form, welche einer Reihe mechanischer Theoreme in der Euklidischen Geometrie abweichend von der nicht-Euklidischen Geometrie annehmen, indem in letzterer diese Theoreme sich in Folge dessen gleichmäßiger gestalten. An diesen nur vorläufig ausgesprochenen Satz werden wir sogleich (bei Besprechung der Flächensätze etc.) wieder anknüpfen haben.

Wir gehen über zur 2. Mechanik freier Systeme.

Wie gewinnt man die Differentialgleichungen der Bewegung eines freien Systems, sagen wir, von Massenpunkten? Man stellt für die Massenpunkte einmal den Ausdruck für die lebendige Kraft auf: $T = \frac{1}{2} \sum m_i \left(\frac{ds_i}{dt} \right)^2$; wo ds_i das Bogenelement des Massenpunktes m_i bezeichnet, andererseits den Ausdruck des Potentials, welches, wenn man z. B. an den Fall des Planetensystems denkt, die Form annimmt:

$$U = G \cdot \sum \frac{m_i \cdot m_k}{r_{ik}}.$$

Wir bekommen alsdann die Differentialgleichungen der Bewegung des Systems, wenn wir nach dem Hamilton'schen Princip verlangen, daß

$$\delta \int (T - U) dt = 0 \text{ ist.}$$

Wir werden uns nun gleich fragen können, wie dieser Ansatz in der nicht-Euklidischen Geometrie sich gestaltet. Was die lebendige Kraft angeht, so wird auch hier:

$T = \frac{1}{2} \sum m_i \left(\frac{ds_i}{dt} \right)^2$ zu setzen sein, wo natürlich unter ds_i das nicht-Euklidische Bogenelement zu verstehen ist. Weniger nahe liegt die Beantwortung der Frage, was man als Potential zweier Massenpunkte im nicht-Euklidischen Raume denken soll. In dieser Hinsicht sind 2 Arbeiten von Schering zu erwähnen, die beide in den Göttinger Nachrichten (in den Jahren 1870 und 1873) veröffentlicht sind.

Die erste Arbeit führt den Titel: „die Schwerkraft im Gaußschen Raume“, (wo natürlich als Gaußscher Raum der Raum der hyperbolischen Geometrie zu verstehen ist). Die zweite Arbeit dehnt die Untersuchungen allgemein aus, einmal auf den Fall der elliptischen Geometrie, dann auf Räume von n Dimensionen; es ist dies die Abhandlung:

„Die Schwerkraft im mehrfach ausgedehnten Gaußschen und Riemannschen Raume.“ Weiter sind noch 2 Göttinger Dissertationen über diesen Gegenstand zu nennen:

Fresdorf 1873. „ Ueber die Geometrie und die Potens-
tialfunktion im Gaußschen und Riemannschen
Raume. „ und

Opitz 1881. „ Einige Sätze über die Anziehung
in mehrfach ausgedehnten Gaußschen und
Riemannschen Räumen. „

Wir hatten die nicht-Euklidische Entfernung
 r gesetzt $r = c \log. DV$ (hyperbolische Geometrie)
 resp.

$r = ic' \log. DV$ (elliptische Geometrie), wo wir
 im speciellen $c' = \frac{1}{2}$ gewählt haben.

Nach der Scheringschen Formel ist also dann
 die Potentialfunktion zweier Punkte, abgesehen
 von einer Constanten, die von den Massen
 jener Punkte und den gewählten Einheiten ab-
 hängt, im Fall der hyperbolischen Geometrie
 gleich:

$$U = \pm \frac{1}{2c} \frac{e^{\frac{r}{2c}} + e^{-\frac{r}{2c}}}{e^{\frac{r}{2c}} - e^{-\frac{r}{2c}}} \quad \text{oder wenn wir} \\ \text{für } r \text{ den obigen} \\ \text{Worth einführen:}$$

$$U = \pm \frac{1}{2c} \frac{\sqrt{D} + \sqrt{D}^{-1}}{\sqrt{D} - \sqrt{D}^{-1}} \quad \text{Setzen wir} \\ \text{hierin, um die}$$

entspr. Formel für die elliptische Geometrie
 zu erhalten, für c ein ic' , so kommt:

$U = \mp \frac{1}{2c'} \cdot \cotg. \frac{r}{2c'}$, oder in dem besonderen Falle,
wo $c' = \frac{1}{2}$ ist,

$$U = \mp \cotg. r.$$

In der That, wenn wir c unendlich werden lassen, um den Uebergang zur Euklidischen Geometrie zu machen, so geht die obige Formel für die hyperbolische Maassbestimmung, indem wir $e^{\frac{r}{2c}}$ in eine Potenzreihe entwickeln und uns auf die beiden ersten Glieder beschränken, über in

$$\frac{1}{2c} \frac{1 + \frac{r}{2c} + 1 - \frac{r}{2c}}{1 + \frac{r}{2c} - 1 + \frac{r}{2c}} = \frac{1}{2c} \cdot \frac{2c}{r} = \frac{1}{r} \cdot \text{d. h.}$$

„Bei unendlich werdendem c entsteht wirklich aus dem Scheringschen Potentialausdruck das Elementarpotential $\frac{1}{r}$ der gewöhnlichen Euklidischen Geometrie.“

Im übrigen möchte ich hier gleich eine merkwürdige Sache einschalten, die den elliptischen Raum betrifft. Wir hatten, wie wir uns erinnern werden, denselben in zwei Gestalten kennen gelernt, einmal als einfachen projektiven Raum, dann als verdoppelten oder sphärischen Raum. In ersterer Hinsicht war uns das Strahlen- und Ebenenbündel typisch, für welches die einfache elliptische Geometrie gilt;

wenn wir aber das Strahlenbündel auf eine herumgelegte Kugel beziehen, so entstand auf der Kugel die sphaerische Geometrie, indem die Beziehung der Kugel auf das Strahlenbündel eine ein-zweideutige ist. Das Charakteristische dieser Verhältnisse bestand dann darin: In der einfachen Geometrie schneiden sich zwei kürzeste Linien in einem Punkte, die gesammte Länge der kürzesten Linie ist gleich π . In der sphärischen Geometrie schneiden sich zwei kürzeste Linien in 2 Punkten, die gesammte Länge der kürzesten Linie ist gleich 2π . Der Riemannsche Raum" wird nun im allgemeinen so verstanden und so geschieht es in den gesammten Publikationen, daß ihm die zweite der genannten Geometrien zu Grunde liegt.

Nachdem wir uns dies ins Gedächtniß zurückgerufen haben, wollen wir die Potentialfunktion in einen und im anderen Raum der elliptischen Maßgeometrie betrachten.

1.) Denken wir uns zunächst, daß wir im sphärischen Raum operieren. Wir betrachten als Potentialfunktion den Ausdruck $\text{ctg. } r$, und nehmen dementsprechend etwa im Punkte 0

eine anziehende Masse = 1 als vorhanden an.

In ihm ist das Potential gleich $+\infty$. Wenn wir uns dann vom Punkte O aus entfernen, bis wir nach Durchlaufung der Strecke π zum Gegenpunkt O' gelangen, so wird in ihm das Potential ctg. $v = -\infty$ sein.

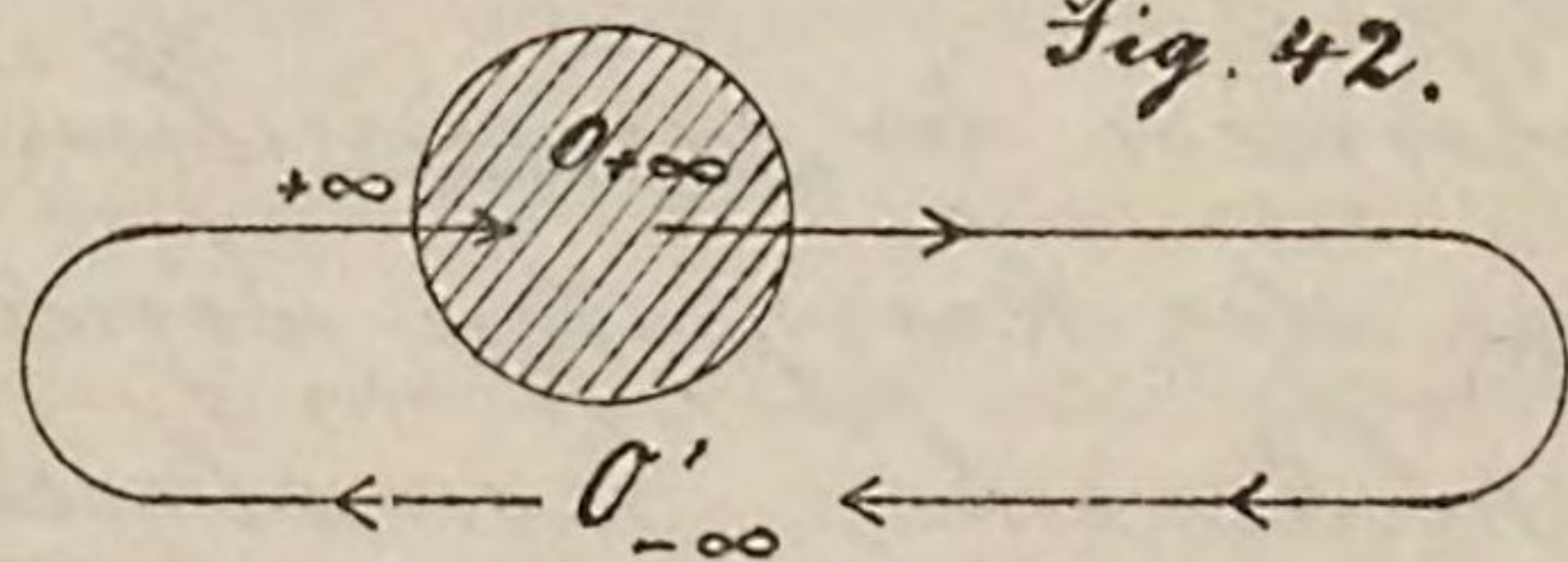
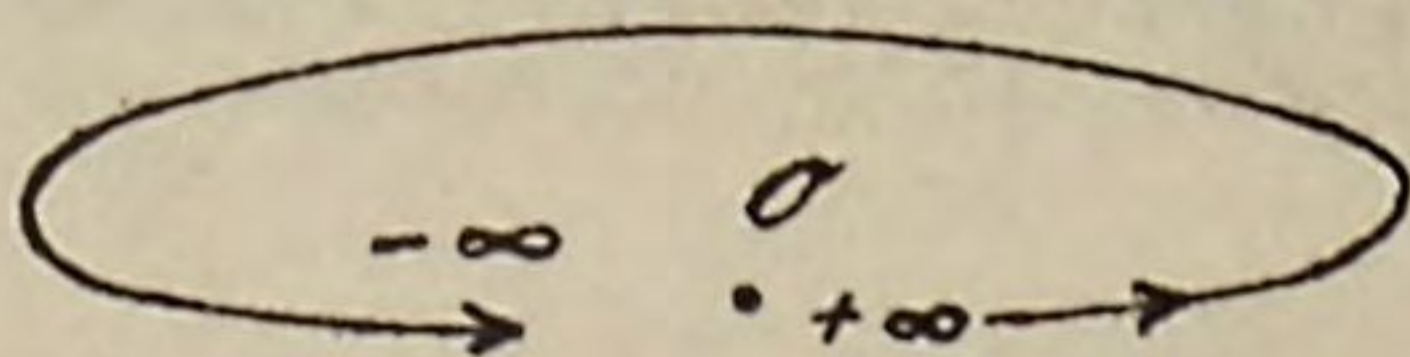


Fig. 42.

Wir haben uns daher zu denken, daß im Gegenpunkte O' eine abstoßende Masse

gleich -1 vorhanden ist. Legen wir vom Gegenpunkte O' aus nochmals die Strecke π zurück, so gelangen wir wieder zum Ausgangspunkt O zurück, für den ctg. v dann den früheren Werth $+\infty$ wieder erhält. Diese Anschauungsweise, besonders was das Verhalten von ctg. v im Gegenpunkt O' angeht, ist ja einigermaßen compliciert, enthält aber durchaus nichts Widersinniges, da wir ja in Wirklichkeit in der Umgebung des Punktes O bleiben.

2.) Nehmen wir nun den Fall des einfachen elliptischen Raumes vor. Wir gehen wieder aus von dem Punkte O , für den ctg. v gleich $+\infty$ ist, in dessen Nähe also Anziehung stattfindet.



Nach Durchlaufung der Strecke π kehren wir zum Punkte 0 zurück, für den dann $\cotg. V = -\infty$ wird, was Abstopfung in der Nähe des Punktes 0 voraussetzen würde.

Im einfachen elliptischen Raume erweist sich daher $\cotg. V$ als keine eindeutige Funktion der Ordinate der Raumpunkte.

$\cotg. V$ und $-\cotg. V$ gehen in einander über, sobald wir eine gerade Linie nach ihrer ganzen Durchstreckung durchlaufen. Das aber widerspricht der Vorstellung, welche wir von einem mechanischen Grundgesetze haben, wo doch die Kraft, die auf einen Punkt wirkt, an jedem Orte des Raumes eindeutig bestimmt sein soll, und deshalb also ist die Annahme des einfachen elliptischen Raumes mit der hier gewollten Ausdehnung der Potentialtheorie unverträglich."

Was nun die weitere Behandlung der mechanischen Differentialgleichungen eines freien Systems angeht, so leiten wir ja in der Euklidischen Geometrie 7 Integrale ab; es sind dies:
 das Integral der lebendigen Kraft,
 die drei Flächensätze,
 die drei Sätze über die Geschwindigkeit des Schwerpunktes, aus welchen letzteren sich leicht

3 weitere Sätze über den Ort des Schwerpunktes ergeben.

Bei Annahme der nicht Euklidischen Geometrie hat es nun keine Schwierigkeit, das erste Integral, d. h. den Satz von der lebendigen Kraft, ebenfalls aufzustellen. Die folgenden Sätze dagegen gestalten sich anders; denn in der nicht Euklidischen Geometrie giebt es keinen Schwerpunkt, weil es keinen Begriff der parallelen Kräfte giebt. An Stelle der 3 Flächensätze und der 3 Geschwindigkeitsätze für den Schwerpunkt, welche die Euklidische Geometrie kennt und die zusammengekommen aussagen, daß das Drehmoment des Systems in Bezug auf jede Raumgerade genommen constant ist, treten hier dann 6 coordinierte Sätze, welche das Nämliche für jede Raumgerade aussagen.

Ist nämlich m_i die Masse, w_i die Drehgeschwindigkeit des Punktes i in Bezug auf eine bestimmte Gerade, d. h. diejenige Komponente der Bewegung, welche als eine einfache Rotation um die gewählte Axe angesehen werden kann, so gilt für 6 beliebige Axen der Satz, daß $\sum m_i w_i^2 = \text{const.}$ ist.

„Aus diesen 6 Sätzen folgt von selbst die

Constanz des Drehmomentes für jede beliebige 7^{te} gerade Linie. Diese Theorie ist ebenfalls in der ersten Schering'schen Arbeit enthalten, jedoch nur mit Worten, ohne Formeln, ausgeführt.

3.) Was nun endlich die Mechanik der starren Körper angeht, so lassen sich, allgemein zu reden, in ihr dreierlei geometrische Theorien abgrenzen.

a.) Die erste Theorie nimmt auf die Massenvertheilung im Körper selbst noch keine Rücksicht, es handelt sich bei ihr um die Lehre von der Zusammensetzung der Kräfte am starren Körper oder auch um die Betrachtung unendlich kleiner Bewegungen eines starren Körpers. Die Verbindung dieser zweierlei Gegenstände hängt eng zusammen mit der Lehre von den virtuellen Geschwindigkeiten; vergl. Math. Annalen 4. "Notiz über den Zusammenhang der Liniengeometrie mit der Mechanik starrer Körper." (Klein)

b.) Eine zweite Theorie betrachtet die Massenvertheilung im Körper; sie wird spec. als Massengeometrie (*géométrie des masses*) bezeichnet. Schwerpunkt, Hauptträgheitsachsen u. s. w. sind die Begriffe, welche hier discutirt werden. Auch die Theorie der unendlich kleinen Oscillationen eines Körpers um die Gleichgewichtslage gehört hierher.

c.) Man wird drittens die endlichen Bewegungen eines sich selbst überlassenen freien Körpers geometrisch betrachten können (Poissons rollende Kugel). Die drei Problemstellungen sind vielfach behandelt worden; wir geben eine kurze Uebersicht der bez. Literatur:

Ad a. Was zunächst den ersten Punkt angeht, so giebt es eine ältere, auf Poisson zurückgehende Theorie. *) Poisson benutzt nämlich von allen Dingen solche Kräfte, die unendlich klein sind, aber in der unendlich fernen Ebene liegen, so daß sie in Bezug auf den starren Körper wohl ein Drehmoment, aber keine Parallelkomponente haben. Poisson war jedoch ein Mann der elementaren Darstellung, der seinen Schülern nicht zumuthen wollte, sich unendlich ferne, unendlich kleine Kräfte zu denken. Deswegen führte er an ihrer Statt den Begriff des „Kräftepaares“ ein, unter dem man sich ein Paar (entgegengesetzter) paralleler und entgegengesetzt gleicher Kräfte in einem gewissen durch das endliche Drehmoment bestimmten Abstand zu denken hat.

(In der That haben solche Kräfte eine Resultante, die im Unendlichen angreift, aber ihrer Größe

*) die noch fast überall benutzt wird.

nach gleich Oist, d. h. sie sind ein Äquivalent für unsere unendlich kleine unendlich ferne Kraft. Doch wollen wir hier den Begriff der unendlich fernen Kraft beibehalten, weil wir dadurch deutlicher das Princip der Methode bezeichnen können. Dann beruht die Poinso't'sche Behandlung der Kraftsysteme am starren Körper in folgendem:

Poinso't geht behufs Zusammensetzung der Kräfte davon aus, daß man jede Kraft zerlegen kann in eine solche Kraft, welche an einem festen Punkte angreift und in eine solche (unendlich kleine) Kraft, welche in der ∞ fernen Ebene liegt, und er hat also nur zu untersuchen, erstens die Zusammensetzung solcher Kräfte, die auf einen festen Punkt wirken, und zweitens die Zusammensetzung solcher Kräfte, die in der unendlich fernen Ebene liegen."

Dieser Lehre von der Zusammensetzung der Kräfte geht nun genau parallel eine Lehre von der Zusammensetzung der unendlich kleinen Drehungen, welche ein starrer Körper erleiden kann. Der geraden Linie, nach welcher die Kräfte wirken, entsprechen dabei die Axen, um welche die Rotationen statthaben, insbesondere den unendlich weiten Kräften entsprechen Rotationen um unendlich weite Axen, d. h.

unendlich kleine Parallelverschiebungen. Jede Drehung kann dann dem gerade ausgesprochenen Satze entsprechend zerlegt werden in eine Drehung um eine durch einen festen Punkt gehende Axe und eine Parallelverschiebung, und also reducirt sich die Aufgabe von der Zusammensetzung beliebiger Drehungen auf die Zusammensetzung von Drehungen um einen festen Punkt und auf die Zusammensetzung von Parallelverschiebungen.

Wir fragen uns nun sogleich: Läßt sich diese Poinso't'sche Theorie auf die Verhältnisse der nicht-Euklidischen Geometrie übertragen? Offenbar würde dies nur künstlich möglich sein, indem man an Stelle der ∞ fernen Ebene, welche uns in der nicht-Euklidischen Geometrie fehlt, willkürlich eine beliebig auszuwählende feste Ebene des Raumes setze. Jedenfalls ginge aber hierbei das Schöne, welches in der Poinso't'schen Theorie in der von selbst gegebenen ausgezeichneten Lage der ∞ fernen Ebene liegt, verloren.

Nun gibt es aber neben der älteren Theorie von Poinso't noch eine zweite auf dieselben Fragen bezügliche Theorie, die Schraubentheorie von Ball.

1873. (The theory of Screws.)

Dieselbe ist neuerdings in einem deutschen Werke

dargestellt worden: Gravellius, „theoretische Mechanik starrer Körper.“ (1889). „In dieser Schraubentheorie sieht Ball principiell ab von der Zerlegung des Zusammensetzungsproblems, welche mit Hilfe der ∞ fernen Ebene zu bewerkstelligen ist, stellt vielmehr gleich das allgemeine Problem voran, indem er die unendlich kleinen Bewegungen als etwas Ganzes, Unzerlegbares betrachtet:

„Wenn irgend zwei ∞ kleine Schraubenbewegungen eines Körpers um beliebige (im Allgemeinen zu einander windschiefe) Axen gegeben sind, wie konstruiere ich alsdann die resultierende ∞ kleine Schraubenbewegung?

Das ist die Frage, mit der Ball beginnt, und auf deren Antwort er ein ganzes Lehrgebäude aufbaut.

Welches ist der Werth dieser Ball'schen Theorie? „Offenbar erscheint die Ball'sche Schraubentheorie beim völlig freien Körper nur als eine andere Form der Poinsot'schen Theorie; wenn es sich aber um Körper handelt, deren Beweglichkeit durch 1, 2, 3, 4, 5 Bedingungen allgemeinsten Art gehemmt sind,*)
Bedingungen, welche vielleicht gar keine Paral.

*) Man sagt in diesem Falle, der Körper habe nur 5, 4, 3 etc. „Grade der Freiheit.“

Ueberschiebung des Körpers oder eine reine Rotation
derselben mehr zulassen, sondern nur Verschie-
bungen, die nothwendig mit Rotationen ver-
bunden sind, (bez. Rotationen, die mit Parallel-
verschiebungen verbunden sind), so ist die Ball'sche
Theorie durchaus nothwendig. Denn eine Zerle-
gung im Poincaré'schen Sinne findet dann nicht
mehr statt."

Die Ball'sche Schraubentheorie kann man in
der That ohne sonderliche Mühe auf die nicht-
Euklidische Geometrie übertragen werden, weil
auch im nicht-Euklidischen Raume jede Be-
wegung eine Schraubenbewegung ist. Nur
muß man beachten, daß die nicht-Euklidische
Schraubenbewegung 2 Axen hat, die sich im hyper-
bolischen Falle allerdings noch gut unterscheiden
lassen, dagegen im elliptischen Falle durchaus
gleich berechtigt sind."

Literatur:

a.) Lindemann, Diss. Bd. 7 der Annalen (1873).

„Ueber 2 kleine Bewegungen und über Kraft-
systeme bei allgemeiner projektiver Maßbestim-
mung.“

b.) Clifford, Gesammelte Werke N. 44.

On the Theorie of Screws in a space of Constant
Positive Curvature." (datiert 1876).

s.) Arbeiten von Ball in den Abhandlungen der irischen Academie. Genauere Citate v. im oben erwähnten Werke von Gravelius. pag. 619.

Näher auf diese Verhältnisse einzugehen, würde natürlich viel zu weit führen.

Wir gehen jetzt über:

St b. zur Betrachtung der Massengeometrie.

Wir wollen zunächst in geometrischer Weise ausführen, was wir unter dem „Schwerpunkt“ und den „Trägheitsachsen“ eines Körpers zu verstehen haben, und zwar wollen wir in dieser Hinsicht diejenige Definition geben, die Hesse in seinen Vorlesungen über die analytische Geometrie des Raumes pag. 353 ff. anführt.

Es sei:

$$\frac{ux + vy + wz - p}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} = 0 \quad \text{die Gleichung einer beliebigen Ebene.}$$

Die linke Seite ist der Abstand, den ein Punkt x, y, z von der Ebene hat. Das Quadrat dieses Ausdrucks multipliciert mit der Masse m des Punktes x, y, z giebt uns das „zweite Moment des Punktes in Bezug auf die Ebene“ als:

$$m \cdot \left[\frac{ux + vy + wz - p}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} \right]^2. \quad \text{(Die dritten, vierten, ... Potenzen des Klammer-}$$

ausdrucks, multipliciert mit m würden entspr.
das Moment dritter, vierter, u. s. w. Ordnung geben.)
Sind mehrere discrete Massenpunkte vorhanden,
so stellt sich das Gesamtmoment derselben
in Bezug auf die Ebene dar als:

$$\sum_n m_n \left(\frac{ux_n + vy_n + wz_n - p}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} \right)^2,$$

während, wenn ein continuierlich ausgedehnter Kör-
per vorliegt, das Gesamtmoment die Form
annimmt:

$$\int dm \left[\frac{ux + vy + wz}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} \right]^2, \text{ wo die Integra-}$$

tion über den
ganzen Körper zu erstrecken ist. Dies Moment
zweiter Ordnung des Körpers in Bezug auf die Ebene
können wir natürlich nach u, v, w entwickeln,
wir bekommen die quadratische Form:

$$Au^2 + 2Buv + Cv^2 + 2Duw + 2Evw + Fw^2 + \dots;$$

wo $A, B, C \dots$ u. s. w. von der Gestalt des Kör-
pers abhängige Constante sind.

Heße benennt nun als das imaginäre Bild ei-
nes festen Körpers diejenige nulltheilige Fläche 2^{ten}
Grades, welche umhüllt wird von solchen Ebenen, be-
treffs deren das Moment 2^{ter} Ordnung unseres Körpers gleich 0
ist."

Die Gleichung dieser Fläche in Ebenencoordinaten erhalten wir ganz einfach durch Einsetzen des obigen Ausdrucks.

„Der Schwerpunkt des Körpers und seine 3 Hauptträgheitsachsen sind nun einfach der Mittelpunkt und die Hauptachsen dieses imaginären Bildes.“

An die Theorie der Trägheitsmomente und Hauptträgheitsachsen knüpft nun an:
ad c. die Betrachtung der Bewegung eines freien, sich selbst überlassenen Körpers.

Wir haben uns hier zu fragen, 1. wie ist die Bewegung des Schwerpunktes, 2. wie ist die Drehung des Körpers um denselben.

In Betreff des ersten Punktes gilt der Satz, daß, wenn keine äußeren Kräfte auf den Körper wirken, der Schwerpunkt sich geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit fortbewegt. Die Drehung des Körpers um den Schwerpunkt andererseits wird gegeben durch die Gleichungen:

$$A \frac{dp}{dt} = (B - C) \cdot q \cdot r$$

$$B \frac{dq}{dt} = (C - A) \cdot r \cdot p$$

$$C \frac{dr}{dt} = (A - B) \cdot p \cdot q, \text{ wo } p, q, r \text{ die}$$

instantanen Drehungsgeschwindigkeiten um die Hauptträgheitsmomente des Körpers sind. Es sind dies die bekannten Eulerschen Gleichungen der Drehung eines Körpers um einen festen Punkt wie man sie in jedem Lehrbuch der Mechanik findet. Die Auswerthung dieser Formeln geschieht entweder durch Integration mittelst elliptischer Funktionen oder nach Poisson in geometrischer, der Anschauung zugänglicher Weise, indem man einen gewissen Kegel auf einem anderen sich abrollen läßt.

Wir werden nun wieder fragen, wie stellt sich diese Theorie der Drehung eines Körpers um einen festen Punkt bei nicht-Euklidischer Maassbestimmung dar? Eine Antwort giebt (unter Beschränkung auf den elliptischen Raum) Clifford in seiner Abhandlung: "Motion of a Solid in Elliptic Space". N. 41 seiner gesammelten Werke. (1874).

Clifford beginnt damit, zunächst das Analogon zu Hesse's Definition der Trägheitsaxen aufzusuchen. Es sei die Fundamentalfäche der elliptischen Maassbestimmung:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0.$$

Man bilde dann den Ausdruck:

$$\sum m^{(i)} \frac{(u_1 x_1^{(i)} + u_2 x_2^{(i)} + u_3 x_3^{(i)} + u_4 x_4^{(i)})^2}{x_1^{(i)2} + x_2^{(i)2} + x_3^{(i)2} + x_4^{(i)2}},$$

genommen über alle Massenpunkte des Systems. Diesen Ausdruck nennt Clifford natürlich das zweite Moment des Systems in Bezug auf die Ebene u . Entwickelt nimmt derselbe die Form an:

$$A_{11} u_1^2 + 2 A_{12} u_1 u_2 + A_{22} u_2^2 + 2 A_{13} u_1 u_3 + 2 A_{23} u_2 u_3 + A_{33} u_3^2 + 2 A_{14} u_1 u_4 + 2 A_{24} u_2 u_4 + 2 A_{34} u_3 u_4 + A_{44} u_4^2.$$

Setzen wir diesen Ausdruck gleich null, so erhalten wir die Bedingung dafür, daß die Ebene u ein verschwindendes zweites Moment hat.

Die Gesamtheit der Ebenen dieser Eigenschaften nennen wir wieder das „imaginäre Bild des Körpers“.

Auch hier ist dasselbe eine nulltheilige Fläche zweiten Grades, da ja unser ursprünglicher „Summen“-Ausdruck rein aus Quadraten zusammengesetzt war. Diese Fläche zweiten Grades hat nun mit unserer Fundamentalfäche zweiten Grades ein Polartetraeder gemein. Im Fall der Euklidischen Geometrie lieferte das gemeinsame Polartetraeder des imaginären Bildes und der absoluten Fläche d. h. des imaginären „Kugels“, gerade in seinen im Endlichen verlaufenden

Kanten die drei Hauptträgheitsachsen durch den Schwerpunkt des Körpers, während die drei anderen Kanten in der ∞ fernen Ebene lagen. Doch hier, im elliptischen Falle, tritt natürlich die Vereinfachung nicht ein, die für den genannten Euklidischen Fall maassgebend ist, daß nämlich eine ausgezeichnete Ebene, die wir von vorneherein kennen (nämlich die unendlich ferne Ebene des Euklidischen Raumes) dem Polartetraeder angehört.

„Das gemeinsame Polartetraeder des imaginären Bildes und der absoluten Fläche giebt nun in seinen Kanten diejenigen Linien, welche Clifford als die 6 Hauptträgheitsachsen des Körpers bezeichnet.“

Da es sich hier um ein Polartetraeder der absoluten Fläche handelt, so ist eine Drehung um eine unserer Kanten zugleich eine Verschiebung längs der konjugierten Kante. Seien jetzt u, v, w die Drehungsgeschwindigkeiten längs dreier Kanten unseres Tetraeders, die in einem Eckpunkte zusammenlaufen, x, y, z die Verschiebungsgeschwindigkeiten längs derselben drei Kanten, dann wird nach Clifford l. c. die Bewegung eines freien, keinen äußeren Kräften

unterworfenen Körpers durch folgendes den Eulerschen Gleichungen analoge System gegeben:

$$\frac{dx}{dt} = C(vw - yz) \text{ und zwei analoge Gl. für } \frac{dy}{dt} \text{ u. } \frac{dz}{dt}$$

und

$$\frac{du}{dt} = C'(zw - yv) \text{ und zwei weitere Gl. für } \frac{dv}{dt} \text{ u. } \frac{dw}{dt}.$$

Dieses System besteht also aus 6 von einander nicht abtrennbaren Differentialgleichungen, die im übrigen noch der Bearbeitung harren.

Der Euklidische Fall ist hier eben deswegen sehr viel einfacher, indem von den hingeschriebenen Gleichungen die drei ersten ohne weiteres sich erledigen, die auf die Bewegung des Schwerpunktes treffen. die drei anderen sind dann die gewöhnlichen Eulerschen Gleichungen.

So viel über die Mechanik fester Körper.

Wir werden unseren bisherigen Betrachtungen zum Schluss noch in einem kurzen Abriss die Behandlung gewisser geometrischen Fragen der nicht-Euklidischen Geometrie hinzufügen, die wesentlich sind und bisher noch nicht berücksichtigt waren.

Nachträge zur nicht-Euklidischen Geometrie.

i.) Was zunächst die Aufstellung allgemeiner algebraischer Formeln für die Maßverhältnisse des R_3 angeht, so werden wir natürlich auszugehen haben von einer beliebigen quaternären quadratischen Gleichung: $\sum_{i,k=1}^4 a_{ik} x_i x_k = 0$ oder in Ebenencoordinaten geschr. $\sum_{i,k=1}^4 d_{ik} u_i u_k = 0$, welche uns das unserer Maßbestimmung zu Grunde zu legende fundamental-Gebilde 2^{ten} Grades ergibt. Wir werden dann zunächst zu fragen haben, wie wir den Abstand zweier Punkte und den Winkel zweier Ebenen in Bezug auf dies Gebilde definieren wollen. Die hierin Betracht kommenden Formeln werden genau analog denen für die Ebene sein. Der Abstand zweier Punkte x, y ist z. B. als:

$$M_{x,y} = C \log. DV = C \log. \frac{\sum_{xy} + \sqrt{\sum_{xy}^2 - \sum_{xx} \sum_{yy}}}{\sum_{xy} - \sqrt{\sum_{xy}^2 - \sum_{xx} \sum_{yy}}}$$

oder anders geschrieben:

$$= \frac{2C}{i} \arccos. \frac{\sum_{xy}}{\sqrt{\sum_{xx} \sum_{yy}}} \text{ etc. zu definieren.}$$

Diese Formeln stimmen mit denen der Ebene genau überein, nur daß die Σ bis zum Index 4 laufen, nicht nur bis zum Index 3, wie in der Ebene. Es ist kaum nöthig, ausführlicher

hierbei zu verweilen.

Doch im Raume können wir gewisse höhere Probleme der Maßgeometrie aufstellen, für welche in der Ebene sich noch kein Analogon bietet. Wenn auch den Definitionen des Abstandes zweier Punkte, des Winkels zweier Ebenen, des Abstandes eines Punktes von einer Ebene im Raume genau die entsprechenden Definitionen des Abstandes zweier Punkte, des Winkels zweier Geraden, des Abstandes eines Punktes von einer Geraden in der Ebene gegenüberstehen, so haben wir im Raume noch die Beziehungen der geraden Linien zu sich selbst und den Punkten und Ebenen. Man spricht z. B. bei 2 windschiefen Geraden in der Euklidischen Geometrie von dem kürzesten Abstand derselben, außerdem auch von ihrer Neigung; dieselben Fragen lassen sich natürlich auch in der nicht-Euklidischen Geometrie stellen. Wir wollen gleich den Standpunkt einnehmen, daß wir einen n -fach ausgedehnten Raum betrachten.

„Es entsteht alsdann das allgemeine Problem, in einem solchen Raum von n Dimensionen für irgend 2 lineare Mannigfaltigkeiten desselben bzw. von μ und von ν Dimensionen die für sie in Betracht kommenden Maßunterschiede

zu berechnen. "

Solche Fragen sind in allgemeinste Weise gelöst von dem italienischen Mathematiker d'Ovidio in Turin in den beiden Arbeiten:

- a) Studio sulla geometria proiettiva. *) Annali di Matem. II. 1873 (vgl. auch das Referat von mir im Bd. I der Fortschritte der Mathem. p. 273ff.)
 b.) Le funzioni metriche fondamentali negli spazi di quanto si vagliano dimensione e di curvatura costante. Mem. Acad. dei Lincei. Bd. I 1876.

Ein Auszug der letzten Arbeit findet sich in den Annalen Bd. XII. **)

2.) Was nun die speciellen Realitätsverhältnisse an-
 geht im Raum von 3 Dimensionen, so haben wir besonders die drei Fälle zu unterscheiden, daß unsere Fundamentalfläche dem ovalen, nulltheiligen oder ringförmigen Typus der eigentlichen Flächen zweiten Grades angehört.

*) geometria proiettiva ist soviel wie nicht-Euklidische Geometrie, d. h. metrische Geometrie vom projektiven Standpunkte aus.

**) vergl. übrigens auch, was die Verhältnisse speciell des R_3 angeht, die schon auf pag. 216 genannte Arbeit von Lindemann in Bd. 7 der Math. Ann.

Im ersten Falle ergab sich die hyperbolische Geo-
metrie, für die wir besonders Interesse gewannen,
 wegen ihrer Beziehung zur Funktionen-theorie.
 Im zweiten Falle hatten wir es mit der ellipti-
schen Geometrie zu thun. Diese wird von einem
 gewissen theoretischen Standpunkte aus den
 Vorzug der größten Symmetrie haben, indem
 in ihr das Princip der Dualität unbedingt gilt.
 So z. B. ist hier der Abstand zweier Punkte gleich
 dem Winkel der beiden Polarebenen, was bei der
 hyperbolischen Geometrie aus leicht ersichtlichem
 Grunde nicht der Fall ist. [da wir die von un-
 serer Verfügung abhängenden Constanten c, k
 für Abstände und Winkel in hyperbolischen
 Falle von einander verschieden wählen].
 Den dritten Fall endlich haben wir überhaupt
nicht näher betrachtet, da man bei ihm von
 jedem Punkte des Raumes aus einen eintheiligen
 Kegel an die Fundamentalfäche legen kann,
 das Bogenelement also in jedem Theile des Rau-
 mes durch eine indefinite Form der Differentia-
 le dx gegeben wird. Dieser Fall ist in der That
 interesselos für uns, falls uns daran liegt,
 Analogie mit der gewöhnlichen Geometrie zu haben.
 Aus demselben Grunde haben wir uns auch im

Fall der hyperbolischen Geometrie wesentlich auf das Innere der Fundamentalfäche beschränkt, da wir ausserhalb derselben wieder ein indefinites Bogen-
element haben würden.

Die Euklidische Geometrie ist dann ein specieller Fall der parabolischen Geometrie, die den Uebergangsfall zwischen hyperbolischer und elliptischer Geometrie bildet. Ihr liegt eine nulltheilige Kurve 2^{ten} Grades zu Grunde. Wollten wir vollständig schematisieren, so würden wir noch eine ganze Zahl weiterer specieller Fälle der Massbestimmungen aufzuzählen haben, je nach der Art der betr. Fundamentalfäche 2^{ten} Grades. (z. B. eintheiliger Kegelschnitt, Linienpaar u. s. w.)

Doch gehen wir nicht näher darauf ein, da unser Interesse ja wesentlich an den erwähnten drei Fällen haftet.

3.) Im Schluss möchte ich noch einiges über die elliptische Geometrie sagen, was von früher her im Rückstande ist. Wir hatten hier doch zwei besondere Arten von Bewegungen kennen gelernt, die wir als "Schiebungen" bezeichneten. Werden die Variabeln λ , μ in gewohnter Weise auf der Fläche gedeutet, um die Erzeugenden festzulegen, so war z. B. eine Schiebung der ersten Art charak.

serisiert dadurch, daß man die u unverändert ließ, die λ aber einer linearen Substitution unterwarf, die im Fall der reellen Schiebung des Quaternionentypus annahm:

$$\lambda' = \frac{(A + iC)\lambda - (B - iD)}{(B + iD)\lambda + (A - iC)}.$$

Die zugehörige Substitution der x schrieb sich in der Quaternionensprache alsdann:

$$(x'_1 + ix'_2 + jx'_3 + kx'_4) = (A + iB + jC + kD)(x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4).$$

Wir hatten auch bereits gelernt, daß hierbei eine ganze Congruenz reeller gerader Linien in sich verschoben wird. Gemäß unserer früheren Auseinandersetzungen ergibt sich dann der Satz:

Unsere specielle Bewegung, welche wir als eine Schiebung des Raumes bezeichneten, hat zweifach ∞ viele Schraubenachsen, indem jeder Punkt des Raumes eine gerade Linie beschreibt und jede Ebene des Raumes sich um eine in ihr liegende gerade Linie dreht. In der That wird jede Linie unserer Congruenz als eine Schraubenaxe unserer Bewegung angesehen werden können, woraus der zweite Theil unseres Satzes folgt, insofern doch durch jeden Punkt des Raumes eine Congruenzgerade hindurchgeht

und in jeder Ebene des Raumes eine Congruenz-
gerade liegt.

Wir können diese Vorstellung einer solchen Bewe-
gung nun auf's schönste beleben, wenn wir die
Idee der Continuität anwenden, wie sie ja bereits
in den Worten „schrauben“ und „Bewegung“ liegt.

Dieser Idee können wir bereits in den Substitu-
tionen des λ Ausdruck geben.

Wenn wir mit ξ, η, ζ auf der λ -Kugel den
Endpunkt des Durchmessers festlegen, um welchen
sich die Drehung vollzieht, die unserer Substitu-
tion von Quaternionentypus entspricht, so
war zu setzen:

$$A = \cos. \frac{\varphi}{2}.$$

$$B = \eta \sin. \frac{\varphi}{2}.$$

$$C = \zeta \sin. \frac{\varphi}{2}.$$

$$D = \xi \sin. \frac{\varphi}{2}, \text{ abgesehen von einem}$$

unwesentlichen Proportionalitätsfaktor.

Setzen wir für A, B, C, D diese Werthe in die
Substitutionsformel der X ein, so nimmt diese
die Gestalt an:

$$(x'_1 + ix'_2 + jx'_3 + kx'_4) = (\cos. \frac{\varphi}{2} + (i\eta + j\zeta + k\xi) \sin. \frac{\varphi}{2}).$$

$$(x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4).$$

Der Idee der Continuität tragen wir nun ganz
einfach Rechnung, indem wir den Winkel φ von 0

allmählich wachsen lassen, bis für $\varphi = 2\pi$ alles wieder wird, wie es war. Es bewegt sich dann der Raum mit seinen Punkten längs der einzelnen Schraubenachsen, d. h. der Kongruenzlinien so, bis er zur Anfangslage zurückgekommen ist.

Fragen wir nun, wie groß das Stück ist, um welches sich ein Punkt bei einem beliebigen φ verschiebt oder wie groß der Winkel ist, um den eine Ebene sich dreht, eine Frage, die wir oben ausdrücklich unerledigt gelassen hatten, so ergibt sich bei einfacher Ausrechnung der Satz:

Verstehen wir unter φ die Amplitude der Drehung, welche die λ -Kugel bei festgehaltenem Punkte ξ, η, ξ erfährt, so erleidet unser elliptischer Raum, (bei welchem die Gesamtlänge der geraden Linie gleich π ist) eine Schiebung längs eines bestimmten Strahlensystems, bei welcher jeder Punkt auf der durch ihn gehenden Linie des Strahlensystems um $\frac{\varphi}{2}$ fortschreitet, während sich jede Ebene um die um ihr liegende gerade Linie des Strahlensystems um $\frac{\varphi}{2}$ dreht."

Diesem Satz können wir noch eine besondere Bedeutung geben, wenn wir unsere Aufmerksamkeit

keit auf eine specielle Art von Flächen 2^{ten} Grades richten, nämlich auf solche Flächen 2^{ten} Grades, die mit der absoluten Fläche zweiten Grades 4 Erzeugende, je zwei der einen und der anderen Art, gemeinsam haben.

Ist $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$ die Gleichung der Fundamentalfläche, so wird eine Fläche der verlangten Eigenschaft beispielsweise gegeben durch:

$$\mathcal{S}(x_1^2 + x_2^2) + \mathcal{S}(x_3^2 + x_4^2) = 0, \text{ wo } \mathcal{S}, \mathcal{S} \text{ beliebig.}$$

Man erhält eine solche ausgezeichnete Fläche 2^{ten} Grades auch leicht geometrisch, indem man aus einer unserer Congruenzen irgend drei Linien herausgreift, die doch unsere Fundamentalfläche in Punkten derselben beiden Erzeugenden z. B. der ersten Art treffen. Nun kann man sofort das Hyperboloid konstruieren, welches diese drei Linien enthält, indem man an ihnen entlang eine gemeinsame Transversale laufen läßt. Dieses Hyperboloid wird unsere Fläche in 2 Erzeugenden der ersten Art treffen; also wird es ihr auch in 2 Erzeugenden zweiter Art begegnen, d. h. eine unserer ausgezeichneten Flächen 2. Grades sein.

„Umgekehrt wird jede ausgezeichnete Fläche 2^{ten} Grades, d. h. jede Fläche, welche die absolute

Fläche in einem windschiefen Viereck schneidet, mit den Linien ihrer einen Erzeugung einer rechts gewundenen Congruenz und mit den Linien ihrer anderen Erzeugung einer links gewundenen ausgezeichneten Congruenz angehört. Nun wird doch der Raum mit seinen Punkten sich längs der einzelnen Linien der einen oder anderen Congruenz in besprochener Weise verschieben lassen. Eine ausgezeichnete Fläche zweiten Grades läßt sich daher auf 2 Arten sinnlich in sich selbst überführen, indem man entweder die Erzeugenden der einen Art oder die Erzeugenden der anderen Art als Bahnkurven benutzt. Da es sich hierbei um eine Collineation des Raumes handelt, bei welcher auch die Erzeugenden der nicht benutzten Art wieder in Erzeugende übergehen müssen, so sehen wir, daß unsere Fläche 2^{ten} Grades die schöne Eigenschaft besitzt, daß 2 Erzeugende der einen Art gleich große Stücke abschneiden. Dies ist die in Aussicht gestellte Folgerung aus dem Satze der p. 231.

Die ausgezeichneten Congruenzen in der elliptischen Geometrie, längs denen sich der Raum verschieben kann, und die ausgezeichneten Flächen, deren

Erzeugende den Congruenzen der einen oder der anderen Art angehören, das sind nun die Gebilde, auf die seiner Zeit Clifford zuerst die Aufmerksamkeit lenkte. Ich möchte seine bezüglichlichen Ideen hier um so lieber erwähnen, als dieselben nicht publiciert sind. Es war auf der Versammlung der British Association zu Bradford 1873 (der ich selbst beizuohnte) wo Clifford diese Dinge in einem Vortrage mittheilte. In den Reports of the British Association wird davon indeß nichts als die Ueberschrift angegeben, „On a surface of zero curvature and finite extent“, die sich auch in den gesammten Werken von Clifford ohne jede Erläuterung wiederfindet.

Es läßt sich zeigen, eben aus ihrem Verhalten bei den Schiebungen, daß unsere ausgezeichneten Flächen, in dem elliptischen Raume, der sie enthält, wirklich das Krümmungsmaass ∞ besitzen; außerdem sieht man leicht, daß selbstverständlich ihr Gesamtflächeninhalt endlich ist, weil ja die Länge der erzeugenden geraden Linien eine endliche ist; womit ein erstes Beispiel dafür gegeben ist, daß eine geschlossene Mannigfaltigkeit, die das Krümmungsmaass Null besitzt, nicht ∞ ausgedehnt zu sein braucht. *)

*) In der That bin ich zu den allgem. Erläuterungen

Aber das Interessante, was Clifford hinzufügte, waren einige Bemerkungen bezüglich der Definition des Parallelismus, die besonders unsere Aufmerksamkeit verdienen, da ja die erste Entwicklung der nicht-Euklidischen Geometrie bekanntlich gerade an die Frage, was Parallelen seien, anknüpft. Unsere nicht-Euklidische Definition des Parallelismus soll eine Generalisierung der gewöhnlichen Definition sein. Nun hat man aber den Begriff „parallel“ vor Clifford nur in einer Weise generalisiert, indem man sagt: Parallele Linien sind solche Linien, welche einen ∞ fernen Punkt gemein haben. Diese Definition geht ja in der That in die gewöhnliche über, wenn wir von einer ∞ fernen Ebene sprechen. Uebrigens aber giebt es ihr zufolge im hyperbolischen Raum 2 Parallele durch einen gegebenen Punkt zu einer gegebenen Geraden, im elliptischen Raum aber giebt es überhaupt keine Parallelen, da es ja auch keinen ∞ weiten Punkt giebt.

Den so definierten Parallelen des nicht-Euklidischen Raumes geht jedoch ziemlich die Gesamtheit der eleganten und bequemen Eigenschaften ab,

hierüber, die ich im Wintersemester gab, von Cliffords Bemerkung aus gekommen.

welche wir bei den Parallellinien des Euklidischen Raumes kennen.

In der Euklidischen Geometrie können wir z. B. den Raum in den Parallellinien verschieben, nicht aber in der nicht-Euklidischen Geometrie, so fern wir eben an der genannten Definition der Parallelen im nicht-Euklidischen Raume festhalten.

Dem gegenüber bringt Clifford in Vorschlag, zwei Linien parallel zu nennen, wenn sie derselben ausgezeichneten Congruenz der einen oder der anderen Art angehören, d. h. wenn sie dieselben 2 Erzeugenden der einen resp. der anderen Art der Fundamentalfäche gleichzeitig treffen. Im hyperbolischen Raume sind diese Parallelen natürlich imaginär; im elliptischen Raume aber giebt es zweierlei Arten, die rechts gewundenen und die links gewundenen Parallelen. Durch einen Punkt außerhalb einer geraden Linie kann ich zu ihr 2 Parallelen ziehen, eine rechts gewundene und eine links gewundene. Im speciellen Falle des Euklidischen Raumes gehen sie in die gewöhnlichen Parallelen über. Der Unterschied der neuen Parallelen des elliptischen Raumes von den Parallelen der Euklidischen Geometrie ist natürlich der, daß

sie windschief sind, solange nicht der nicht „
Euklidische Raum in einem Euklidischen ausar-
set, dagegen haben sie mit den gewöhnlichen Paral-
lelen die Eigenschaft gemein; gleichzeitig die Tra-
jektorien ein- und derselben Raumbewegung
bilden zu können. Hierauf beruht es dann,
 daß bei dieser Definition der Parallellinien im
 nicht „ Euklidischen Raume fast alle geometri-
 schen Sätze und Eigenschaften, die in der Ele-
 mentargeometrie über Parallellinien aufgestellt
 werden, sich wieder finden.

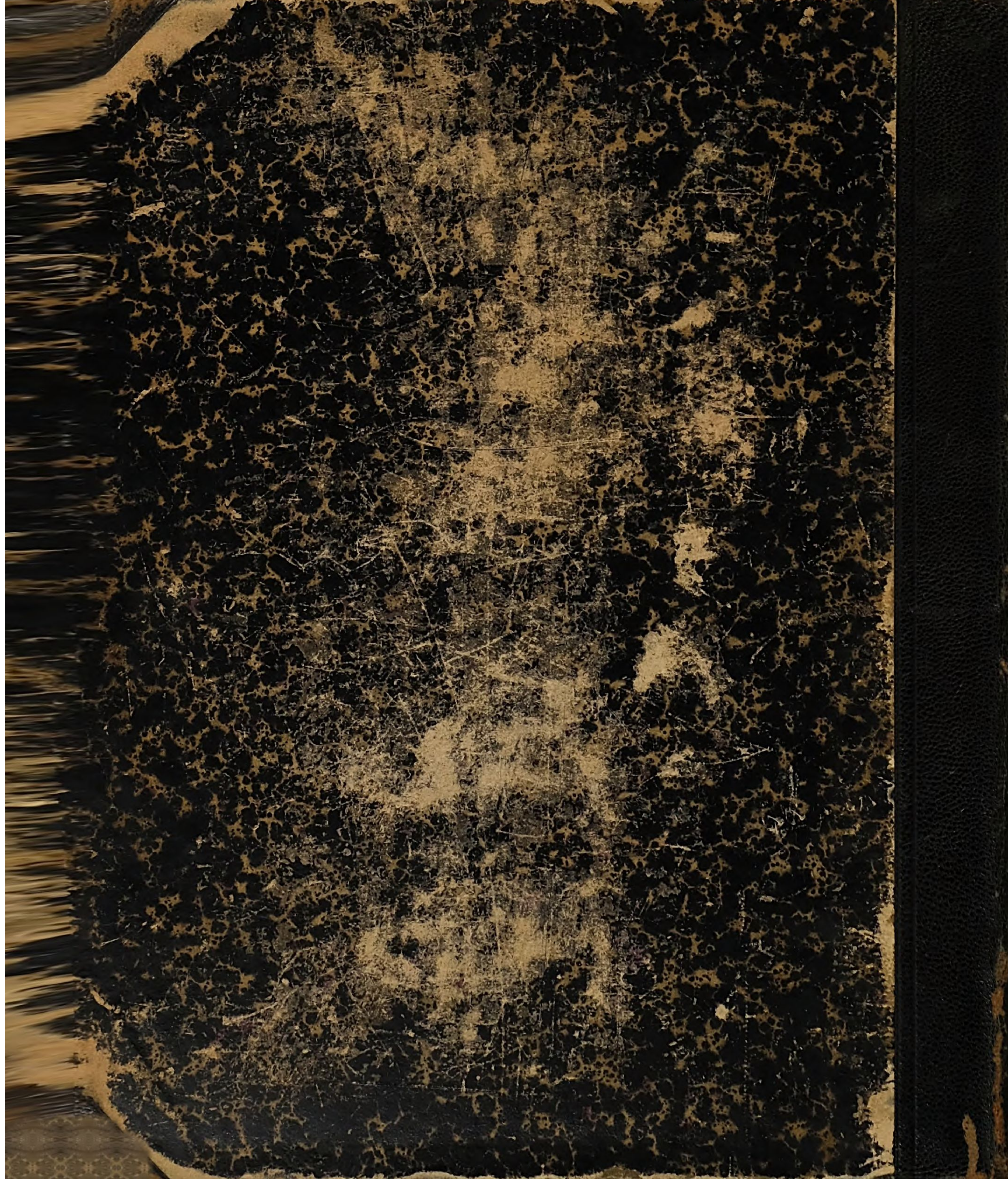
„ Beispielsweise können wir die Eigenschaft der
 ausgezeichneten Flächen 2^{ten} Grades, die wir eben
 kennen lernten jetzt dahin aussprechen, daß die,
 selbe durch ihre Erzeugenden in lauter Parallelo-
 gramme zerlegt wird, wobei mit dem Wort Paral-
 lelogramm im Gegensatze zur Euklidischen Geo-
 metrie eine Figur bezeichnet wird, die nicht eben
 ist, aber übrigens fast alle Eigenschaften des
 gewöhnlichen Parallelogramms besitzt.“

Hiermit schließe ich die gegenwärtige Vorlesung.
 Es ist mir eine Genugthuung, daß ich zuletzt noch
 in ausgiebiger Weise der Clifford'schen Ideen ha-
 be gedenken können. In der That habe ich mich
 wenigen Geometern so eng verbunden gefühlt,

als eben, vom Zeitpunkte unserer persönlichen Bekanntschaft an, (1873), Clifford, den wenige Jahre darauf eine unselige Krankheit weg-
 raffte, so daß uns Ueberlebenden die Pflicht blieb, die fundamentalen Gedanken, mit denen er sich trug, und die aus seinen frag-
 mentarischen Publikationen nur unvollkom-
 men zu erkennen sind, von uns aus zu er-
 läutern und zu verbreiten.

(Ende.)





Klein, Felix,

Nicht-Euklidische Geometrie Ausgearbeitet von Fr. Schilling

Bd.: II

1893

Math.p. 255 ked-1/2

urn:nbn:de:bvb:12-bsb11651199-3